

Mathias Michel

Modulare Konstruktion spezieller gemischter Quantenzustände

Diplomarbeit vorgelegt am 2. Mai 2002

Hauptberichter: [Prof. Dr. G. Mahler](#)

Mitberichter: [Prof. Dr. S. Dietrich](#)

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen und Motivation	3
2.1	Quantenmechanische Grundlagen	3
2.1.1	Quantennetzwerke und Hilbertraum	3
2.1.2	Liouvillerraum	3
2.1.3	Dichteoperator	4
2.1.4	Reine und gemischte Zustände	6
2.1.5	Reduzierte Dichtematrix	7
2.2	Gedankenexperimente	7
2.2.1	EPR-Paradoxon	8
2.2.2	„Blasse“ Teleportation	10
3	Unitäre Operatorbasis	13
3.1	Definition einer unitären Operatorbasis	13
3.2	Eigenschaften	14
3.3	Operatorbasis	15
3.4	Eigenwerte und Eigenzustände	16
4	Produktoperatorbasis	19
4.1	Definition der Produktoperatoren	19
4.2	Eigenschaften der Produktoperatoren	20
4.3	Eigenwerte und Eigenzustände	22
4.4	Entwicklung von Dichtematrizen nach Produktoperatoren	23
4.5	Korrelationstensor eines beliebigen Zustands	25
5	Spezielle reine und gemischte Zustände	27
5.1	„Katzenzustände“	27
5.2	Verallgemeinerte Katzenzustände	28
5.3	Verallgemeinerter WERNER-Zustand	29
5.4	„Blasse“ Zustände	30
6	Separabilität	31
6.1	Separabilität und Verschränkung	31
6.2	Separabilitätskriterien	32

6.2.1	Reine Zustände	32
6.2.2	Gemischte Zustände	32
6.3	PPT-Kriterium für den verallgemeinerten WERNER-Zustand	34
6.4	PPT-Kriterium „blasser“ Zustände	36
7	Pakete	39
7.1	Definition der Pakete	39
7.2	Eigenschaften der Pakete	41
7.3	Separabilität der Pakete	43
8	Mischungsverfahren mit Paketen	45
8.1	Erzeugung verallgemeinerter WERNER-Zustands	45
8.1.1	Auswahl der Pakete	45
8.1.2	Anzahl der Pakete	45
8.1.3	Mischung der Pakete	46
8.1.4	Berechnung von ϵ	47
8.2	Zustandsmischung an der Separabilitätsgrenze	48
8.2.1	Pakete mit $a = 1$	48
8.2.2	Spezielle Mischung	49
8.2.3	Zustandsmischung	50
8.3	Grenzen des Verfahrens	51
9	Module	53
9.1	Definition der Module	53
9.2	Eigenschaften der Module	54
9.3	Separabilität der Module	55
9.4	Erzeugung der Module aus den Paketen	57
9.4.1	Grundlegende Module	57
9.4.2	Beliebige Phase	60
10	Mischungsverfahren mit Modulen	63
10.1	Mischung verallgemeinerter WERNER-Zustände	63
10.2	Mischung beliebiger „blasser“ Zustände	64
10.2.1	Zu mischender Zustand	64
10.2.2	Mischung der Module	65
11	Mischungsaufwand	69
11.1	Aufwandsdefinition	69
11.2	Mischungsaufwand für verallgemeinerte WERNER-Zustände	70
11.3	Mischungsaufwand für „blasse“ Zustände	71
12	Zusammenfassung und Ausblick	73

Anhang	79
A Beispiele für unitäre Operatoren:	79
B Eigensystem unitärer Operatoren	80
B.1 Eigensystem von allen Operatoren mit $a = 0$	80
B.2 Eigensystem von allen Operatoren mit $a \neq 0$	80
C Mischungen mit Paketen	82
C.1 Verallgemeinerter WERNER-Zustand (n prim)	82
C.2 Verallgemeinerter WERNER-Zustand (n nichtprim)	84
D Beispiel zur Mischung eines Moduls	87
E Mischungen eines WERNER-Zustands mit Modulen	89
F Gedankenexperimente	90
F.1 EPR-Paradoxon	90
F.2 „Blasse“ Teleportation	92
Literaturverzeichnis	93
Index	95

Symbolverzeichnis

\mathbb{C}	Menge der komplexen Zahlen
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{P}	Menge der Primzahlen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\Im	Imaginärteil
\Re	Realteil
\mathbf{m}	Ordnung des \mathbf{m} -Clusters
$\frac{1}{d}\hat{1}$	total gemischter Zustand
$\hat{1}$	Einsoperator
$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$	Doppelindizierung für Produktoperator
$\{a_\mu, b_\mu\}$	Doppelindex für unitären Operator
$A(n, N)$	Aufwandfunktion
$A_{\text{nichtopt}}(n, N)$	Aufwandfunktion für die nichtoptimale Mischung
$A_{\text{opt}}(n, N)$	Aufwandfunktion für die optimale Mischung
\hat{A}	beliebig Operator
$\hat{A} \geq 0$	Positiv Definiten Operator
\hat{A}^\dagger	Adjunktion des Operators \hat{A}
$\hat{C}_{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}}$	Produktoperator
$\hat{C}_{\mathbf{c}}$	Produktoperator
$\hat{\mathbf{c}}^{(\nu, \dots, \kappa)}$	Clusteroperator
$\mathbf{c}_{c_\nu, \dots, c_\kappa}$	Einzelindizierung für Produktoperator
\mathbf{c}	Einzelindex für unitären Operator
c_μ	Einzelindex für unitären Operator
$d = n^N$	Gesamthilbertraumdimension
$\delta_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}$	KRONECKER-Delta im Gesamthilbertraum
$\delta_{i, j}$	KRONECKER-Delta im Subsystemhilbertraum
e	Eulersche Zahl
ϵ	Mischungsparameter
ϵ_{grenz}	Mischungsparameter an der Separabilitätsgrenze
ϵ_{Misch}	Mischungsparameter aus einer Mischung
ϵ_{opt}	Mischungsparameter einer optimalen Mischung
ϵ_{PERES}	Mischungsparameter aus PERES-Kriterium
ϕ	Phase
ψ_{norm}	Zustandsnormierung
$f(j_1)$	Mischungskoeffizient zur Phasenmischung
$f(\Theta)$	Korrelationsfunktion

\mathcal{H}	Hilbertraum
i	imaginäre Einheit
$ \mathbf{i}\rangle = i_1, \dots, i_N\rangle$	Produktzustand, Produktbasis
$ i\rangle$	Basiszustand eines Subsystems
$ \text{Katze}\rangle_{\{\mathbf{0}, \mathbf{0}\}}$	Standard Katzenzustand
$ \text{Katze}\rangle_{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}}$	Maximal verschränkter Zustand
$ \lambda_m\rangle$	Eigenvektor von \hat{U}_c
$ \Lambda_m^c\rangle$	Eigenzustand des Produktoperators
λ_m	Eigenwert von \hat{U}_c
Λ_m^c	Eigenwert des Produktoperators
\mathcal{L}	Liouvillerraum
κ	Subsystemindex
μ	Subsystemindex
ν	Subsystemindex
\mathcal{N}	Normierungskonstante, Zahl der Module
N	Zahl der Subsysteme in einem Quantennetzwerk
N_p	Normierungskonstante, Zahl der Pakete
N_z	Entartungsgrad der Produktoperatoren
$n_\mu = n$	Niveauezahl eines Subsystems, Hilbertraumdimension Subsystem
$N_{p(a=1)}$	Normierungskonstante, Zahl der Pakete zu $a=1$
$ \psi\rangle$	beliebiger Vektor im Hilbertraum, Wellenfunktion
p	Wahrscheinlichkeit
$\hat{\rho}_{\text{Alice}}$	Dichtematrix von Alice
$\hat{\rho}_{(a=1)}$	Dichtematrix einer Mischung mit $a = 1$
$\hat{\rho}$	Dichtematrix
$\hat{\rho}_{\text{blass}}$	Dichtematrix des blassen Zustand
$\hat{\rho}_{\text{Bob}}$	Dichtematrix von Bob
$\hat{\rho}_{\text{ges}}$	gesamte Dichtematrix
ρ_{ij}	Matrizelement des Dichteoperators
$\hat{\rho}_{\text{Katze}}$	Dichtematrix des Katzenzustands
$\hat{\rho}_{\text{Misch}}$	Dichtematrix einer Mischung
$\hat{\rho}_{\text{Modul}}(\mathbf{c}, s)$	Modul
$\hat{\rho}_{\text{P.Z.}}$	Dichtematrix eines Produktzustands
$\hat{\rho}_{\text{Paket}}(\mathbf{c}, s)$	Paket
$\hat{\rho}_{\text{rein}}$	Dichtematrix eines reinen Zustands
$\hat{\rho}_{\text{spez}}$	Dichtematrix einer speziellen Mischung
$\hat{\rho}_{\text{vor}}$	vorläufige Mischung von Modulen
$\hat{\rho}_{\text{WERNER}}$	Dichtematrix des WERNER-Zustands
$r(\eta)$	Mischungskoeffizient zur Mischung von Modulen
$\hat{\sigma}_i$	PAULI-Operator
σ	positive ganze Zahl
$\text{Spur}_\nu\{\dots\}$	Spur über Subsystem ν
$\text{Spur}\{\dots\}$	Spur eines Operators
s	positive ganze Zahl

Θ	Winkel
ϑ	Phase
$\hat{U}_{a,b}$	unitärer Operator
\hat{U}_c	unitärer Operator
u_c	Korrelationstensorelement
$u_c(\dots)$	Korrelationstensorelement
\mathfrak{U}	Korrelationstensor
\mathcal{V}	Skalarproduktraum
ω	erste Einheitswurzel: $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$
\underline{x}	Modulo-Funktion: $\underline{x} = x \bmod n$
Ξ	reelle Konstante, die nur von Systemparametern abhängt
Ξ_ϕ	reelle Systemkonstante von der Phase ϕ abhängig

1 Einleitung

In den letzten Jahren ist das Verständnis der „Welt der Quanten“, ihrer Gesetze und Eigenschaften immer umfangreicher und tiefer geworden. Die Begriffe „Teleportation“ [1], „Quantenkryptographie“ [2, 3] und „Quantencomputer“ [4, 5] sind nicht nur in der Fachpresse zu Begriffen des täglichen Lebens avanciert. Hinter diesen Begriffen stehen nichtklassische, quantenmechanische Phänomene, die von vielen Wissenschaftlern auf der ganzen Welt untersucht werden. Zum Teil sind diese Phänomene theoretisch gut verstanden, jedoch experimentell noch kaum realisiert - einige, beispielsweise der „praktisch nützliche“ Quantencomputer, sind bis heute überhaupt nicht zugänglich.

Andererseits sind gewisse grundlegende Eigenschaften der Quantentheorie, oder der Welt der kleinsten Bausteine des Universums, auch theoretisch bis heute nicht umfassend verstanden. Eine der wohl wichtigsten Eigenheiten der Quantenwelt ist die *Verschränkung* (engl. entanglement). Alle oben genannten Quantenphänomene, also Quantencomputer, Quantenkryptographie, Teleportation usw., bauen auf diesem fundamentalen Phänomen auf. Verschränkung ist eine Eigenschaft von Systemen, die aus mehreren Teilsystemen aufgebaut sind. Sind die Subsysteme miteinander verschränkt, so weisen Messungen an unterschiedlichen Teilsystemen Korrelationen auf, die es in einer rein klassischen Welt nicht geben kann, d.h. die von einer *klassischen, lokal realistischen Theorie* nicht erklärt werden können. Die Teilsysteme selbst haben dann keine scharf definierten lokalen Eigenschaften mehr. Natürlich gibt es auch andere Zustände in der Quantenmechanik, bei denen lokale Eigenschaften scharf definiert sind. Diese bezeichnet man als klassische oder *separable* Zustände. Bis heute ist die Grenze zwischen diesen unterschiedlichen Zuständen - den verschränkten und den separablen, oder anders ausgedrückt, den klassischen und den wirklich quantenmechanischen Zuständen - für viele Systeme noch weitgehend unerforscht. Es gibt bis jetzt keine allgemeingültigen scharfen Kriterien für Verschränkung oder Separabilität, lediglich für einige Spezialfälle existieren scharfe Separabilitätskriterien [6], die meisten allgemeineren sind entweder nur hinreichend oder nur notwendig [7, 8, 9, 10, 11], dazu mehr in Kapitel 6. Die Grenze zwischen der klassischen Welt und der quantenmechanischen Welt sowie Übergänge von einem Szenarium in das andere bergen noch viele neue und interessante Aspekte, die bis jetzt noch wenig bekannt sind.

Schon die Verschränkung an sich bereitet große Schwierigkeiten, da sie offenbar nicht den klassischen Erfahrungen unserer Welt entspricht. So glaubte man anfangs, die Quantentheorie sei in bestimmter Hinsicht nicht vollständig und EINSTEIN, PODOLSKY und ROSEN (siehe [12]) hofften mittels Einführung versteckter Variabler in die Theorie das seltsame Phänomen Verschränkung zu beseitigen. Nachdem heute allerdings in vielen

Experimenten solche verschränkten Zustände untersucht werden konnten, hat man sich mit diesem Phänomen angefreundet. Allerdings ist in den vergangenen Jahren - durch die Bemühungen des Baus eines NMR-Quantencomputers [13, 10] und die dort verwendeten gemischten Zustände - die Frage gestellt worden, ob Verschränkung für die oben angesprochenen Anwendungen wirklich unbedingt nötig sei. Schlußendlich kann diese Frage jedoch bis jetzt nicht beantwortet werden. Im Zusammenhang mit der Untersuchung von NMR-Ensemble sind gemischte Quantenzustände wie der WERNER-Zustand [14] studiert worden. Der hier genannte WERNER-Zustand ist von besonderem Interesse, da mittels eines Parameters eingestellt werden kann, ob der Zustand separabel oder verschränkt ist.

Die vorliegende Arbeit stellt den Versuch dar, gemischte Zustände vom WERNER-Typ besser verstehen zu lernen. Dabei ist die wichtige Eigenschaft, die Nicht-Separabilität oder Verschränkung, von besonderem Interesse. Der hier beschrittene Weg ist in gewissem Sinne der der *klassischen Simulation* quantenmechanischer Korrelationen oder von Verschränkung. Als Grundlage sollen klassische Zustände dienen, die so genannten Produktzustände. Das sind reine, separable Zustände, die keine Verschränkung enthalten. Diese Zustände werden gemischt, nicht kohärent superponiert, was zur Folge hat, dass jeder erzeugte Zustand mit Sicherheit separabel ist, da eine Mischung keine Verschränkung erzeugen kann. Von Interesse wird sein, ob es möglich ist, Mischungsverfahren anzugeben, mit denen man bestimmte Korrelationen herstellen kann, z.B. Korrelationen vom WERNER-Typ. Optimal würde ein solches Verfahren funktionieren, wenn man damit Zustände direkt an der Separabilitätsgrenze erzeugen könnte. Bei allen diesen klassischen Simulationen wächst der Aufwand exponentiell mit der Subsystemzahl an. Trotzdem kann man hier viel über die Struktur des quantenmechanischen Zustandsraums, die Eigenschaften von gemischten Zuständen und Zustandsklassen, Partitionierung des Zustandsraums, Separabilitätsgrenzen und das Verhältnis von klassischen zu quantenmechanischen Zuständen und Korrelationen lernen. Auch im Hinblick auf den hier verwendeten Formalismus, der sich zur Beschreibung von Korrelationen jeglicher Art als sehr günstig erwiesen hat, dürfte diese Arbeit von Interesse sein.

In dem nun folgenden Kapitel 2 sollen zunächst sowohl quantenmechanische Grundlagen als auch interessante Gedankenexperimente zur weiteren Einführung in die Thematik vorgestellt werden. Die Kapitel 3 und 4 werden sich mit der Einführung einer günstigen Darstellung von Korrelationen beschäftigen. In Kapitel 5 sollen die schon oben angesprochenen WERNER-Zustände vorgestellt werden und Kapitel 6 wird sich mit Separabilitätskriterien und deren Anwendung auf die vorgestellten Zustandsklassen beschäftigen. In den folgenden Kapitel 7-11 werden, wie angesprochen, Mischungsverfahren entwickelt und untersucht. Kapitel 12 wird schließlich eine Zusammenfassung der Arbeit und einen Ausblick für die weitere Forschung bieten.

2 Grundlagen und Motivation

Zunächst soll jetzt kurz auf die quantenmechanischen Grundlagen zur Beschreibung von Quantennetzwerken eingegangen werden. Dabei werden nur die wichtigsten und für die vorliegende Arbeit unerlässlichen Theoreme und Definitionen kurz vorgestellt. Weiterführend wird auf die umfangreiche Literatur zum Thema und insbesondere auf [15] verwiesen.

Im zweiten Teil dieses Kapitels soll dann auf einige interessante Gedankenexperimente eingegangen werden, um die Arbeit in den Gesamtkontext der Quanteninformationstheorie bzw. der Theorie großer Quantensysteme einzuordnen und eine Interpretation der Ergebnisse vor diesem Hintergrund zu erlauben.

2.1 Quantenmechanische Grundlagen

2.1.1 Quantennetzwerke und Hilbertraum

Im folgenden sollen Systeme betrachtet werden, die aus N -Subsystemen oder „Knoten“ aufgebaut sind. Jedes dieser Subsysteme μ sei ein endlich dimensionales Quantensystem mit n_μ -Niveaus. Solche Systeme werden im allgemeinen auch als *Quantennetzwerke* bezeichnet. In dieser Arbeit sollen nur *homogene* Netzwerke betrachtet werden, d.h. alle Knoten haben gleich viele Niveaus $n_\mu = n$.

Der *Hilbertraum* $\mathcal{H}^{(d)}$ des gesamten Quantennetzwerks ist ein Produkthilbertraum bestehend aus den Hilberträumen $\mathcal{H}^{(n_\mu)}$ aller Knoten μ :

$$\mathcal{H}^{(d)} = \mathcal{H}^{(n_1)} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}^{(n_N)}. \quad (2.1)$$

Die Dimension d des gesamten Hilbertraums ergibt sich als Produkt der Einzelhilbertraumdimensionen, hier also n^N . Eine geeignete Basis für den Hilbertraum ist die Produktbasis, die später eingeführt wird.

2.1.2 Liouvillerraum

Lineare Operatoren, die auf Zustände des d -dimensionalen Hilbertraums $\mathcal{H}^{(d)}$ wirken, sind Elemente des d^2 -dimensionalen *Liouvillerraums* $\mathcal{L}^{(d^2)}$. Dieser Operatorraum wird aufgespannt von einer Basis bestehend aus d^2 linear unabhängiger Basisoperatoren. Eine solche Basis soll in Kapitel 3 vorgestellt werden (siehe auch [16]).

2.1.3 Dichteoperator

Um in der Quantenmechanik einen Zustand zu beschreiben, z.B. den eines Quantennetzwerkes, gibt es unterschiedliche Möglichkeiten. Die allgemeinste Form der Beschreibung ist die mittels eines *Dichteoperators* $\hat{\rho}$. Oft erweist sich die Matrixform des Dichteoperators mit den Matrixelementen ρ_{ij} , für die Darstellung als günstig. Der Erwartungswert einer Observablen \hat{A} kann dann durch

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Spur}\{\hat{A} \hat{\rho}\} \quad (2.2)$$

berechnet werden. Wie jeder Operator kann auch der Dichteoperator in seine Eigenbasis zerlegt werden und geht dann in Diagonalform über. Mit den Eigenwerten λ_m und den Eigenzuständen $|\lambda_m\rangle$ des Dichteoperators ergibt sich die Darstellung:

$$\hat{\rho} = \sum_m \lambda_m |\lambda_m\rangle \langle \lambda_m|. \quad (2.3)$$

Allerdings muss der Operator, um einen echten quantenmechanischen Zustand beschreiben zu können, die folgenden drei wichtigen Eigenschaften erfüllen (siehe dazu auch [17]):

1. **Normierung:** $\text{Spur}\{\hat{\rho}\} = 1$
2. **Hermitizität:** $\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger$
Aufgrund dieser Eigenschaft kann der Dichteoperator selbst als Observable angesehen werden.
3. **Positivität:** Der Operator muss positiv definit sein, d.h. alle Eigenwerte müssen größer oder gleich Null sein, man schreibt: $\hat{\rho} \geq 0$.

Betrachtet man die Eigendarstellung des Dichteoperators Gl. (2.3), so folgt aus der Hermitizität und der Positivität, dass alle Eigenwerte λ_m positive reelle Zahlen sein müssen. Wegen der Normierungsforderung muss die Summe aller Eigenwerte eins sein, weshalb diese als Wahrscheinlichkeiten interpretierbar sind. Der Dichteoperator kann also als Mischung der reinen Zustände $|\lambda_m\rangle$ mittels der Gewichte λ_m verstanden werden, oder als Zustand eines Ensemble, dessen Teile mit Wahrscheinlichkeit λ_m im Zustand $|\lambda_m\rangle$ zu finden sind.

Im allgemeinen ist es oft schwierig zu zeigen, dass ein Operator alle drei Forderungen für einen echten Zustand erfüllt. Vor allem die letzte der drei Forderungen, die Positivität, ist häufig nicht direkt zugänglich. Auch in dieser Arbeit ist es desöfteren schwierig, die Positivität einer Matrix zu zeigen, da die Eigenwerte nicht allgemein berechenbar sind. Aus der Mathematik ist eine interessante Eigenschaft von Skalarprodukträumen bekannt, mit der die Positivität einer Matrix überprüft werden kann, ohne die Eigenwerte

explizit auszurechnen.

Definition 1: Skalarproduktraum

Ein Satz von Elementen α, β, \dots spannt einen vollständigen, linearen Skalarproduktraum \mathcal{V} auf genau dann, wenn folgendes gilt:

1. **Linearität:**

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &\in \mathcal{V} \\ c\alpha &\in \mathcal{V} \quad \text{mit } c \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

2. **Skalarprodukt:** Zwischen zwei Elementen von \mathcal{V} ist ein Skalarprodukt definiert

$$(\alpha, \beta) = c \quad \text{mit } c \in \mathbb{C}$$

mit den Eigenschaften:

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) &= (\beta, \alpha)^* \\ (\alpha, \alpha) &\geq 0 \end{aligned}$$

3. **Vollständigkeit:** Für jedes α muss gelten:

$$(\alpha, \alpha) = \sum_i (\alpha, \beta_i)(\beta_i, \alpha)$$

Man überzeugt sich leicht, dass alle diese Eigenschaften für den Hilbertraum \mathcal{H} mit den Elementen $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ und dem zugehörigen Skalarprodukt $\langle\alpha|\beta\rangle$ erfüllt sind. In solchen Skalarprodukträumen gilt die CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung:

Theorem 1: CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung

In einem vollständigen, linearen Skalarproduktraum \mathcal{V} gilt für die Elemente α, β die Ungleichung:

$$|(\alpha, \beta)|^2 \leq (\alpha, \alpha)(\beta, \beta).$$

Im Folgenden wird ein Dichteoperator $\hat{\rho}$ mit der Eigenwertgleichung $\hat{\rho}|\lambda_m\rangle = \lambda_m|\lambda_m\rangle$ betrachtet. Zusätzlich braucht man eine weitere vollständige orthonormale Basis $|\psi^{(i)}\rangle$ mit der Entwicklung in die Eigenbasis von $\hat{\rho}$:

$$|\psi^{(i)}\rangle = \sum_m |\lambda_m\rangle \langle\lambda_m|\psi^{(i)}\rangle = \sum_m \psi_m^{(i)} |\lambda_m\rangle. \quad (2.4)$$

Jetzt werden die Matrixelemente von $\hat{\rho}$ in der Basis $|\psi^{(i)}\rangle$ berechnet und man stellt fest, dass das Objekt $\langle\psi^{(i)}|\hat{\rho}|\psi^{(j)}\rangle$, unter bestimmten Voraussetzungen für $\hat{\rho}$, die Eigenschaf-

ten eines Skalarprodukts erfüllt. Berechnet man das Matrixelement:

$$\begin{aligned}
 \langle \psi^{(i)} | \hat{\rho} | \psi^{(j)} \rangle &= \sum_k \left(\psi_k^{(i)} \right)^* \langle \lambda_k | \hat{\rho} \sum_m \psi_m^{(j)} | \lambda_m \rangle \\
 &= \sum_{k,m} \left(\psi_k^{(i)} \right)^* \psi_m^{(j)} \underbrace{\langle \lambda_k | \hat{\rho} | \lambda_m \rangle}_{= \lambda_m \delta_{k,m}} \\
 &= \sum_k \left(\psi_k^{(i)} \right)^* \psi_k^{(j)} \lambda_k, \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

erhält man eine komplexe Zahl. Außerdem gilt, wenn die Eigenwerte λ_k von $\hat{\rho}$ reell sind:

$$\langle \psi^{(j)} | \hat{\rho} | \psi^{(i)} \rangle = \sum_k \left(\psi_k^{(j)} \right)^* \psi_k^{(i)} \lambda_k = \langle \psi^{(i)} | \hat{\rho} | \psi^{(j)} \rangle^*. \tag{2.6}$$

Ist $\lambda_k \geq 0$, so folgt für das Diagonalelement:

$$\langle \psi^{(i)} | \hat{\rho} | \psi^{(i)} \rangle = \sum_k |\psi_k^{(i)}|^2 \lambda_k \geq 0. \tag{2.7}$$

Damit hat das Objekt $\langle \psi^{(i)} | \hat{\rho} | \psi^{(j)} \rangle$ genau dann die Eigenschaften eines Skalarprodukts, wenn der Dichteoperator $\hat{\rho}$ positiv definit und hermitesch ist. In diesem Fall gilt eine CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung. Diese Aussage ist auch umkehrbar: aus der Gültigkeit einer CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung kann auf die Positivität einer Dichtematrix geschlossen werden.

Theorem 2:

Eine gegebene Matrix $\hat{\rho}$ ist genau dann positiv definit, wenn

$$|\langle \psi^{(i)} | \hat{\rho} | \psi^{(j)} \rangle|^2 \leq \langle \psi^{(i)} | \hat{\rho} | \psi^{(i)} \rangle \langle \psi^{(j)} | \hat{\rho} | \psi^{(j)} \rangle$$

gilt.

Theorem 2 ist ein sehr nützlicher Positivitätstest.

2.1.4 Reine und gemischte Zustände

Die Dichtematrix beschreibt den gesamten, für ein System zugänglichen Zustandsraum. Dieser Zustandsraum kann weiter unterteilt werden in reine und gemischte Zustände. Ein reiner Zustand kann als Vektor $|\psi\rangle$ im Hilbertraum \mathcal{H} dargestellt werden, was für einen gemischten Zustand nicht möglich ist. Ein einzelnes Quantensystem mit einer Hilbertraumdimension n hat die reinen Basiszustände $|i\rangle = |0\rangle, \dots, |n-1\rangle$, die den ganzen Hilbertraum aufspannen. Für ein Quantennetzwerk bestehend aus N Knoten

erweist sich die *Produktbasis* zum Aufspannen des d dimensionalen Hilbertraums als günstig.

Definition 2: Produktbasis

Die Produktzustände $|\mathbf{i}\rangle = |i_1\rangle \otimes \cdots \otimes |i_N\rangle$ bilden eine Basis des $\mathcal{H}^{(n^N)}$ mit

Orthonormalität: $\langle \mathbf{i} | \mathbf{j} \rangle = \delta_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}$ und

Vollständigkeit: $\sum_{\mathbf{i}} |\mathbf{i}\rangle \langle \mathbf{i}| = \hat{1}^{(n^N)}$.

Zustände im Gesamthilbertraum $|\mathbf{i}\rangle$ werden im Folgenden durch Indexvektoren $\mathbf{i} = \{i_1, \dots, i_N\}$ indiziert. Das eingeführte KRONECKER-Delta über Indexvektoren entspricht dem Produkt $\delta_{\mathbf{i}, \mathbf{j}} = \delta_{i_1, j_1} \cdots \delta_{i_N, j_N}$.

Die Dichtematrix eines reinen Zustands $|\psi\rangle$ erhält man durch $\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi|$. Ob ein Zustand rein oder gemischt ist, lässt sich mit Hilfe des Quadrats der Dichtematrix entscheiden; es gilt nämlich

$$\text{Spur}\{\hat{\rho}^2\} \rightarrow \begin{cases} = 1 & \rightarrow \text{reiner Zustand} \\ < 1 & \rightarrow \text{gemischter Zustand} \end{cases} \quad (2.8)$$

Der total gemischte Zustand, dargestellt durch den Operator $\frac{1}{d}\hat{1}$, ergibt hier den kleinsten Wert, nämlich $\frac{1}{d}$, wobei d die Dimension des betrachteten Hilbertraums ist.

2.1.5 Reduzierte Dichtematrix

Anfangs hat man nun einen Dichteoperator, der den Zustand eines Quantennetzwerks mit N -Knoten im gesamten Hilbertraum beschreibt. Interessiert man sich hingegen für den Zustand eines einzelnen Knotens μ , so muss man das gesamte übrige System ausspüren. Wird zunächst nur ein Subsystem ν aus einer Gesamtdichtematrix ausgespurt

$$\hat{\rho}_{\text{Rest}} = \text{Spur}_{\nu}\{\hat{\rho}_{\text{ges}}\}, \quad (2.9)$$

bleibt eine Dichtematrix, die alle Knoten ohne den ν -ten beschreibt, übrig. Möchte man nun eine Dichtematrix, die nur den einzelnen Knoten μ beschreibt, müssen alle anderen Subsysteme auch noch ausgespurt werden. Die Dichtematrix des μ -ten Knotens berechnet sich dann durch:

$$\hat{\rho}_{\mu} = \text{Spur}_{\{\nu, \kappa, \dots\}}\{\hat{\rho}_{\text{ges}}\}. \quad (2.10)$$

2.2 Gedankenexperimente

Um ein wenig mehr Einblick in die moderne Quantenmechanik zu geben, sollen hier zwei Gedankenexperimente vorgestellt werden, die in den letzten Jahren großen Bekanntheitsgrad erlangt haben. Diese Experimente haben, in leicht abgewandelter Form,

auch hier zu interessanten Einblicken verholfen und sollen es ermöglichen, diese Arbeit in den Kontext der Quanteninformationstheorie einzuordnen.

2.2.1 EPR-Paradoxon

Das im Folgenden beschriebene Paradoxon geht auf einen Artikel von EINSTEIN, PODOLSKY und ROSEN [12] zurück. Durch die Verschränkung von Subsystemen sind Zustände möglich, bei denen einzelne Subsysteme überhaupt keine scharfen Eigenschaften mehr besitzen. Dafür treten Mehrteilchenkorrelationen auf, die klassisch nicht verstanden werden können. Solche Zustände werden seither als EPR-Zustände, verschränkte Zustände oder auch „Katzen“-Zustände bezeichnet. (Der Name „Katzen“-Zustand geht auf A. SCHRÖDINGER [18] zurück, siehe dazu Kapitel 5.) Der im Folgenden betrachtete verschränkte Zustand ist ein Zustand eines Quantennetzwerks, bestehend aus zwei Subsystemen (mit den Nummern 1 und 2) mit jeweils zwei Quantenniveaus $|0\rangle$ und $|1\rangle$, und kann dargestellt werden durch die kohärente Superposition zweier Produktzustände:

$$|\text{Katze}(1, 2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0(1), 0(2)\rangle + |1(1), 1(2)\rangle). \quad (2.11)$$

Genauer über diesen in der Literatur sehr oft verwendeten und wohl bekanntesten Mehrteilchenquantenzustand ist in Kapitel 5 zu finden. Experimentell ist es gelungen, solche EPR-Zustände mittels polarisationsverschränkter Photonenpaare darzustellen (siehe dazu auch [19, 15, 20]). Dann sind die Zustände $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$ die beiden Polarisationseigenzustände eines Photons.

Hat man eine Quelle, die ein polarisationsverschränktes Photonenpaar erzeugt, das räumlich getrennt werden kann und dessen einzelne Photonen gemessen und untersucht werden können, kann ein EPR-Experiment durchgeführt werden. Wie bereits angesprochen ist beim EPR-Zustand keines der Teilchen lokal in einem definierten Zustand, d.h. in einem Zustand der Form $|\phi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$, wobei a und b beliebige komplexe Zahlen sein können (Norm: $|a|^2 + |b|^2 = 1$). Oder andersherum ausgedrückt sagt man: der Zustand ist nicht separabel in ein Produkt aus lokalen Zuständen der beiden Teilsysteme (siehe Kapitel 6) in der Form $|\phi(1)\rangle \otimes |\xi(2)\rangle$. Damit führt eine lokale Messung der Polarisation eines der Photonen in 50% der Fälle zur Messung von $|0\rangle$ und in den anderen Fällen zu $|1\rangle$. Ein einzelnes Photon befindet sich lokal in einem total gemischten Zustand. Diese Tatsache findet man auch, wenn man aus dem EPR-Zustand ein Subsystem ausspurt.

Das Ergebnis einer Korrelationsmessung der Polarisation beider Photonen erschien nun zunächst paradox. Eine solche Korrelationsmessung kann wie in Abbildung 2.1(a) durchgeführt werden. Die Apparatur besteht aus zwei Detektoren und zwei Filtern, die im Winkel Θ zueinander eingestellt sind, sowie der oben beschriebenen Photonenpaarquelle, die ein polarisationsverschränktes Paar erzeugt. Im Anhang F.1 kann nachvollzogen werden, wie hier das in Abbildung 2.1(b) dargestellte Messergebnis der Korrelationsmessung berechnet werden kann. Hier ist die von Θ abhängige Korrelationsfunktion $f(\Theta)$ aufgetragen, die für $\Theta = 0$ eins (Ergebnis der Einzelmessungen ist perfekt korreliert), für $\Theta = \frac{\pi}{2}$ null (keine Korrelation mehr vorhanden) und für $\Theta = \pi$ minuseins (Antikorrelation) ist. Es entsteht der Eindruck, dass, wenn das eine Teilchen im Zustand $|0\rangle$ oder $|1\rangle$ gemessen wird, das andere Teilchen instantan in den selben Zustand

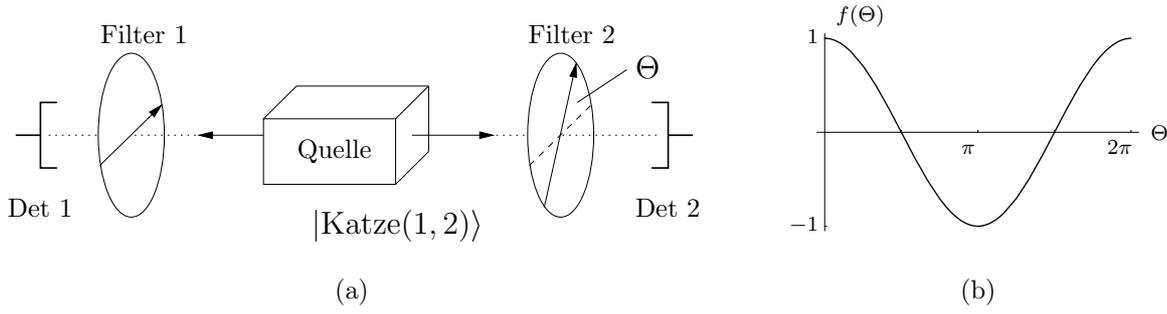


Abb. 2.1: (a) Apparatur zur Korrelationsmessung der Polarisation zweier polarisationsverschränkter Photonen; die absoluten Messrichtungen sind beliebig wählbar; (b) Korrelationsfunktion der Messergebnisse in Abhängigkeit des Winkels Θ

projiziert wird. Klassisch ist ein solches Ergebnis nur vorstellbar, wenn die gemessenen Polarisationszustände bereits vorher existiert hätten. Dies ist aber auszuschließen, da die absolute Messrichtung beliebig gewählt werden kann. Man kann das Experiment bei einer anderen Einstellung von Filter 1 wiederholen, was quantenmechanisch nur eine Verschiebung der Korrelationsfunktion bedingen würde, das Messergebnis also nicht qualitativ ändert. Bei einer klassischen Präparation allerdings führt das Ändern der absoluten Basis zum totalen Verlust jeglicher Korrelation.

Für diese Arbeit ist nun der WERNER-Zustand von besonderer Bedeutung, der eine Mischung aus dem total gemischten Zustand $\frac{1}{n^N}\hat{1}$ und dem EPR-Zustand darstellt. Vermittelt wird diese Mischung durch den reellen Mischungsparameter $0 \leq \epsilon \leq 1$. Da es sich um einen gemischten Zustand handelt, kann hier kein Vektor im Hilbertraum angegeben werden. Die gesamte Rechnung ist im Dichtematrixbild durchzuführen. Die Dichtematrix des WERNER-Zustands hat die Form:

$$\hat{\rho}_{\text{WERNER}} = \frac{1}{n^N}(1 - \epsilon)\hat{1} + \epsilon \hat{\rho}_{\text{Katze}}. \quad (2.12)$$

Ausführlich soll dieser Zustand in Kapitel 5 untersucht werden. Ist der Mischungsparameter ϵ klein genug, so wird der Zustand separabel sein. Die Zustandsklasse der WERNER-Zustände ist separabel, wenn gilt: $\epsilon \leq \frac{1}{3}$ (wie später gezeigt wird). In diesem Fall kann dieser Zustand auch in eine Mischung von Produktzuständen zerlegt werden. Wie die Zerlegung eines WERNER-Zustands in Produktzustände explizit konstruiert werden kann, soll später in dieser Arbeit vorgestellt werden.

Führt man das in Abbildung 2.1(a) gezeigte Experiment jetzt nicht mit dem reinen Katzenzustand durch, sondern mit dem WERNER-Zustand, erhält man ein ähnliches Ergebnis. Die Korrelation der Messergebnisse rechts und links ist noch erhalten, wird allerdings „blass“, d.h. ist mit ϵ multipliziert (siehe dazu Abbildung 2.2). Mehr zu der Skalierung der Korrelation mit ϵ findet man in Kapitel 5.3, die gesamte Rechnung kann im Anhang F.1 nachvollzogen werden.

Es ist auch möglich, den WERNER-Zustand - in Produktzustände zerlegt - der Messung zu unterwerfen, d.h. man schickt jeden der Produktzustände einzeln durch den Korrelationsmessapparat und erhält seine Korrelationsfunktion $f_i(\Theta)$. Superponiert man

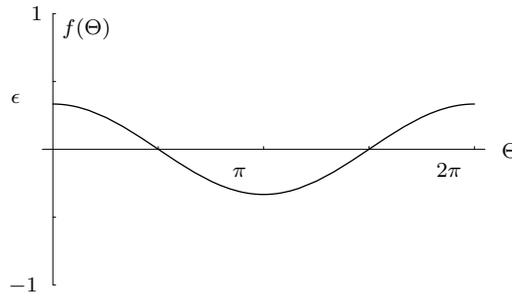


Abb. 2.2: Messergebnis der Korrelationsmessung bei einem WERNER-Zustand anstelle eines reinen EPR-Zustands

alle diese Funktionen, erhält man wieder eine Interferenz (siehe Abbildung 2.2) mit dem für die Zerlegung charakteristischen ϵ . Auch diese Rechnung kann im Anhang F.1 nachvollzogen werden.

Es scheint hier also keine prinzipielle Unterscheidung zwischen separablen Zuständen und solchen, die verschränkt sind, zu geben. Unabhängig von der Separabilität zeigt die Messung Interferenzen, die jedoch mit ϵ skalieren. Selbst die Messung an einem explizit in Produktzustände zerlegten WERNER-Zustand führt zu keinem anderen Ergebnis.

2.2.2 „Blasse“ Teleportation

Eines der faszinierendsten Phänomene der Quantenphysik ist wohl die *Teleportation* (siehe [15]). Dabei ist es mit Hilfe eines Quantenkanals und einer klassischen Informationsübertragung [1] möglich, Zustände über große Entfernungen zu übertragen. Der so genannte Quantenkanal ist der schon im letzten Kapitel eingeführte EPR- oder Katzenzustand [18]:

$$|\text{Katze}(2, 3)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0(2), 0(3)\rangle + |1(2), 1(3)\rangle). \quad (2.13)$$

Die beiden einzelnen Teilchen (2,3) sind räumlich getrennt und können weit entfernten Personen, oft Alice (2) und Bob (3) genannt, zugesprochen werden. Hat nun Alice ein weiteres Teilchen (1) im beliebigen Quantenzustand $|\xi(1)\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$, hat der Gesamtzustand die Form:

$$|\Psi(1, 2, 3)\rangle = |\xi(1)\rangle \otimes |\text{Katze}(2, 3)\rangle. \quad (2.14)$$

Möchte Alice diesen Zustand $|\xi(1)\rangle$ zu Bob übertragen, muss sie ihre beiden Teilchen (1,2) mittels einer 2-Teilchen-Messung miteinander verschränken. Die Messbasis, die mit einer solchen Messung verbunden ist, besteht aus vier orthogonalen Zuständen, den so genannten EPR-Zuständen [12].

$$|\psi(1, 2)\rangle_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle \pm |0, 1\rangle), \quad |\psi(1, 2)\rangle_{3,4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 1\rangle \pm |0, 0\rangle). \quad (2.15)$$

Die hier verwendete Messtheorie geht auf v. NEUMANN zurück, siehe dazu [15, 17, 21]. In der Messbasis kann der Gesamtzustand $|\Psi(1, 2, 3)\rangle$ geschrieben werden als:

$$|\Psi(1, 2, 3)\rangle = \frac{1}{2}(|\psi(1, 2)\rangle_1 |\phi(3)\rangle_1 + |\psi(1, 2)\rangle_2 |\phi(3)\rangle_2 + |\psi(1, 2)\rangle_3 |\phi(3)\rangle_3 + |\psi(1, 2)\rangle_4 |\phi(3)\rangle_4), \quad (2.16)$$

wobei die Zustände des Teilchens von Bob $|\phi(3)\rangle_{1,2,3,4}$ mittels der durch die PAULI-Matrizen vermittelten lokalen, unitären Transformationen aus dem ursprünglichen Zustand von Alice $|\xi(1)\rangle$ hervorgehen:

$$|\phi(3)\rangle_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} |\xi(1)\rangle = \hat{\sigma}_z |\xi(1)\rangle, \quad (2.17a)$$

$$|\phi(3)\rangle_2 = -|\xi(1)\rangle, \quad (2.17b)$$

$$|\phi(3)\rangle_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} |\xi(1)\rangle = i\hat{\sigma}_y |\xi(1)\rangle, \quad (2.17c)$$

$$|\phi(3)\rangle_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} |\xi(1)\rangle = \hat{\sigma}_x |\xi(1)\rangle. \quad (2.17d)$$

Macht nun Alice ihre Messung, erhält sie - mit jeweils der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ - als Ergebnis einen der vier EPR-Zustände. Dies muss sie Bob auf klassischem Weg mitteilen. Dann kann dieser auf seinen Zustand (3) die entsprechende inverse PAULI-Transformation anwenden und hat damit den Zustand von Alice per Teleportation erhalten. Die gesamte Prozedur lässt sich in ein Schema fassen, das in Abbildung 2.3 gezeigt ist.

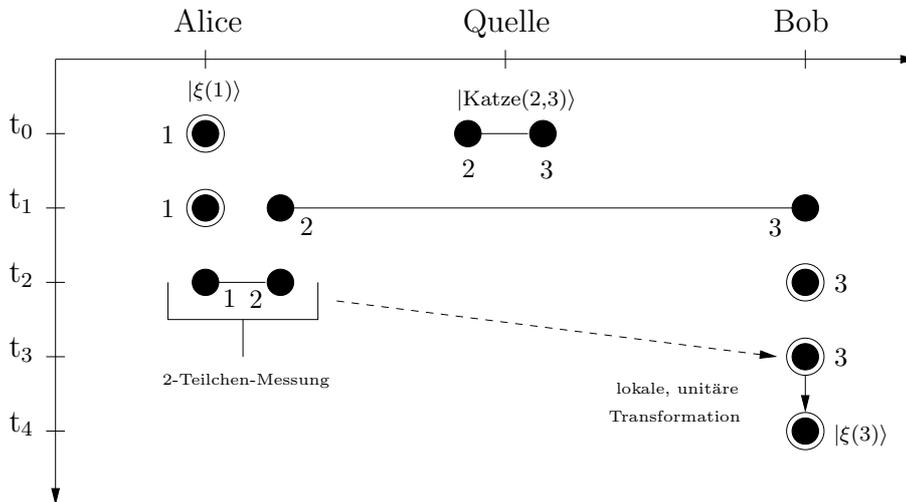


Abb. 2.3: Teleportationsschema: Alice teleportiert den Zustand $|\xi(1)\rangle$ des ersten Teilchens auf das Teilchen 3 von Bob mittels eines Quantenkanals und einer klassischen Informationsübertragung.

Auch hier soll die Teleportation noch mit einem WERNER-Zustand als Quantenkanal anstelle eines reinen Katzenzustands betrachtet werden. In diesem Fall kann - analog wie

oben - Alice ihre EPR-Messung mit dem zu teleportierenden Zustand $\hat{\rho}_{\text{rein}} = |\xi(1)\rangle\langle\xi(1)|$ durchführen, wobei allerdings die ganze Prozedur im Dichtematrixbild berechnet werden muss, da jetzt gemischte Zustände involviert sind. Ihr Messergebnis muss sie wieder Bob mitteilen, damit dieser eine lokale unitäre Transformation anwenden kann, um den teleportierten Zustand zu erhalten. Auf Einzelheiten der Rechnung soll hier verzichtet werden, diese sind in Anhang F.2 zusammengefasst. Bob erhält jetzt nicht exakt den von Alice eingebrachten Zustand, sondern eine verrauschte Version vom Typ:

$$\hat{\rho}_{\text{blass}} = \frac{1}{n^N}(1 - \epsilon)\hat{1} + \epsilon |\xi(1)\rangle\langle\xi(1)|. \quad (2.18)$$

Dieser Zustand wird im Folgenden wegen der „Blassheit“ seiner Korrelationen als „blasser“ Zustand bezeichnet werden (man beachte die Ähnlichkeit zu dem als Quantenkanal verwendeten WERNER-Zustand, siehe Kapitel 5). Der Mischungsparameter ϵ entspricht dem des verwendeten WERNER-Zustands.

Ergebnis dieser „*blassen Teleportation*“ ist wieder die erstaunliche Tatsache, dass hier kein Unterschied zwischen der „blassen“ Teleportation mit einem wirklich verschränkten Zustand und der mit einem separablen Zustand besteht. Die beiden Fälle lassen sich durch die Wahl des anfänglichen ϵ einstellen. Allerdings muss Bob hier mit einem verrauschten Ergebniszustand vorlieb nehmen.

3 Unitäre Operatorbasis

Im folgenden Kapitel wird kein Quantennetzwerk betrachtet, sondern ein einzelnes Quantensystem. Für dieses soll eine Operatorbasis für den Liouvillerraum $\mathcal{L}^{(n^2)}$ eingeführt werden, die sich für die weiteren Betrachtungen als günstig erweisen wird.

3.1 Definition einer unitären Operatorbasis

Betrachtet wird ein einzelnes Quantensystem mit n diskreten Niveaus und den dazugehörigen n orthogonalen Basiszuständen $|0\rangle, \dots, |n-1\rangle$ einer möglichen Basis für den Hilbertraum $\mathcal{H}^{(n)}$.

Genauso wie es möglich ist, Vektoren oder Zustände in eine orthonormale Basis zu entwickeln, können auch Matrizen oder Operatoren in eine entsprechende Basis entwickelt werden. Als Basis werden oft die Generatoren der $SU(n)$ Gruppe [22, 15, 23] verwendet. Diese Basis besteht aus n^2 linear unabhängigen, *hermiteschen* Operatoren. Für $n = 2$ entsprechen die Generatoren der $SU(2)$ Gruppe den PAULI-Operatoren.

Oft erweist es sich als günstiger, statt einer hermiteschen Basis eine *unitäre* zu verwenden. Für den Liouvillerraum $\mathcal{L}^{(n^2)}$ der Dimension n^2 lässt sich eine solche unitäre Operatorbasis mit n^2 unitären Operatoren definieren (siehe [22]).

Definition 3: Unitäre Operatoren

Für die Indizes $a = 0 \dots n - 1$ und $b = 0 \dots n - 1$ sind die Operatoren

$$\hat{U}_{a,b} := \sum_{p=0}^{n-1} \omega^{bp} |p+a\rangle \langle p| \quad \text{mit} \quad \omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

definiert.

Die Summation wird modulo n durchgeführt, wobei im Folgenden die Modulo-Funktion durch Unterstreichung des entsprechenden Terms abgekürzt werden soll ($x \bmod n = \underline{x}$). Für eine abkürzende Schreibweise können die Indizes a und b zu einem Einzelindex c zusammengefasst werden:

$$\hat{U}_c := \hat{U}_{a,b} \quad c = na + b. \tag{3.1}$$

Der Index c läuft dann von 0 bis $n^2 - 1$. Beispiele unitärer Operatoren für $n = 2, 3, 4$ befinden sich im Anhang A.

3.2 Eigenschaften

Wendet man den unitären Operator auf einen Basiszustand an, erhält man:

$$\hat{U}_{a,b}|k\rangle = \omega^{bk}|\underline{k+a}\rangle. \quad (3.2)$$

Aus dieser Relation folgen zwei wichtige Eigenschaften der Operatoren:

1. **Unitarität:** Für die Operatoren (Definition 3) muss gelten: $\hat{U}_{a,b} \hat{U}_{a,b}^\dagger = \hat{1}$.

Beweis:

$$\hat{U}_{a,b} \hat{U}_{a,b}^\dagger = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{U}_{a,b} |k\rangle \langle k| \hat{U}_{a,b}^\dagger \stackrel{(3.2)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} |\underline{k+a}\rangle \langle \underline{k+a}| = \hat{1}^{(n)}. \quad (3.3)$$

Damit sind die eingeführten Operatoren unitär. \square

Hieraus ergibt sich auch der adjungierte und der inverse Operator:

$$\hat{U}_{a,b}^\dagger = \hat{U}_{a,b}^{-1} = \omega^{ab} \hat{U}_{n-a, n-b}. \quad (3.4)$$

2. **Spur:** Die hier eingeführten unitären Operatoren $\hat{U}_{a,b}$ sind bis auf den Operator $a = 0, b = 0$ ($c = 0$) spurlos.

Beweis:

$$\begin{aligned} \text{Spur}\{\hat{U}_{a,b}\} &= \sum_{k=0}^{n-1} \langle k| \hat{U}_{a,b} |k\rangle \stackrel{(3.2)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{bk} \langle k| \underline{k+a}\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{bk} \delta_{a,0} = n \delta_{a,0} \delta_{b,0}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Die letzte Gleichheit gilt, da die Summe für $b \neq 0$ immer null ist. Der triviale Operator $\hat{U}_{0,0}$ hat die Spur n . \square

Mit Hilfe der Spur kann eine Orthogonalitätsrelation für die unitären Operatoren angegeben werden:

$$\text{Spur}\{\hat{U}_{a_1, b_1} \hat{U}_{a_2, b_2}^\dagger\} = n \delta_{a_1, a_2} \delta_{b_1, b_2}. \quad (3.6)$$

Des Weiteren werden noch zwei Operatorrelationen benötigt, die an dieser Stelle eingeführt werden sollen:

$$\hat{U}_{a_1, b_1} \hat{U}_{a_2, b_2} = \omega^{b_1 a_2} \hat{U}_{a_1 + a_2, b_1 + b_2}, \quad (3.7a)$$

$$\hat{U}_{a,b}^\sigma = \omega^{\frac{1}{2} ab \sigma(\sigma-1)} \hat{U}_{\underline{\sigma a}, \underline{\sigma b}}. \quad (3.7b)$$

Die erste Relation folgt direkt aus Definition 3. Die zweite soll hier kurz gezeigt werden, da sie für die weiteren Betrachtungen oft benötigt wird.

Beweis: Gl. (3.7b)

$$\begin{aligned}
\hat{U}_{a,b}^\sigma &= \prod_1^\sigma \hat{U}_{a,b} \\
&= \sum_{p_1=0}^{n-1} \cdots \sum_{p_\sigma=0}^{n-1} \omega^{bp_1} \cdots \omega^{bp_\sigma} |p_1 + a\rangle \langle p_1 | p_2 + a\rangle \langle p_2 | \cdots | p_\sigma + a\rangle \langle p_\sigma | \\
&= \sum_{p_1=0}^{n-1} \cdots \sum_{p_\sigma=0}^{n-1} \omega^{bp_1} \cdots \omega^{bp_\sigma} |p_1 + a\rangle \delta_{p_1, p_2+a} \cdots \delta_{p_{(\sigma-1)}, p_\sigma+a} \langle p_\sigma | \\
&= \sum_{p_\sigma=0}^{n-1} \omega^{bp_1} \cdots \omega^{bp_\sigma} |p_1 + a\rangle \langle p_\sigma | .
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Die KRONECKER-Deltas liefern Bedingungen, um alle p_ν durch p_σ , mit Hilfe der Vorschrift:

$$p_\nu = p_\sigma + (\sigma - \nu)a \tag{3.9}$$

zu ersetzen. Setzt man dies oben ein, erhält man:

$$\begin{aligned}
\hat{U}_{a,b}^\sigma &= \sum_{p_\sigma=0}^{n-1} \omega^{b \sum_{\nu=1}^\sigma (p_\sigma + (\sigma - \nu)a)} |p_\sigma + \sigma a\rangle \langle p_\sigma | \\
&= \sum_{p_\sigma=0}^{n-1} \omega^{\sigma b p_\sigma} \omega^{\frac{1}{2} a b \sigma(\sigma-1)} |p_\sigma + \sigma a\rangle \langle p_\sigma | \\
&= \omega^{\frac{1}{2} a b \sigma(\sigma-1)} \hat{U}_{\sigma a, \sigma b} .
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Damit ist Gl. (3.7b) gezeigt. \square

Die Vertauschungsrelationen für unitäre Operatoren ergeben sich aus Gl. (3.7a):

$$[\hat{U}_{a_1, b_1}, \hat{U}_{a_2, b_2}]_\pm = (\omega^{b_1 a_2} \pm \omega^{a_1 b_2}) \hat{U}_{a_1 + a_2, b_1 + b_2} , \tag{3.11a}$$

$$[\hat{U}_{a_1, b_1}, \hat{U}_{a_2, b_2}^\dagger]_\pm = \omega^{a_2 b_2} (\omega^{-b_1 a_2} \pm \omega^{-a_1 b_2}) \hat{U}_{a_1 - a_2, b_1 - b_2} . \tag{3.11b}$$

Unitäre Operatoren kommutieren genau dann, wenn für ihre Indizes gilt $\underline{b_1 a_2 - a_1 b_2} = 0$, und antikommutieren, wenn gilt $\underline{b_1 a_2 - a_1 b_2} = \frac{n}{2}$.

3.3 Operatorbasis

Die in Kapitel 3.1 eingeführten n^2 Operatoren (Definition 3) bilden eine vollständige, orthogonale Basis. Die Orthogonalitätsrelation ergibt sich aus der Spur der unitären Operatoren

$$\text{Spur}\{\hat{U}_{a_1, b_1} \hat{U}_{a_2, b_2}^\dagger\} = n \delta_{a_1, a_2} \delta_{b_1, b_2} . \tag{3.12}$$

Vollständig ist die Basis, da es genau n^2 linear unabhängige Operatoren gibt, was der Dimensionalität des Liouville-raums entspricht. Damit ist eine Basis für den Liouville-raum gefunden. Aus der Basiseigenschaft folgt, dass jeder beliebige Operator \hat{A} in diese Basis entwickelt werden kann:

$$\hat{A} = \frac{1}{n} \sum_{a=0}^{n-1} \sum_{b=0}^{n-1} u_{a,b} \hat{U}_{a,b} \quad \text{mit} \quad u_{a,b} = \text{Spur}\{\hat{U}_{a,b}^\dagger \hat{A}\}. \quad (3.13)$$

Da auch der Dichteoperator als Observable angesehen werden kann, ist es möglich, auch diesen in die unitäre Operatorbasis zu entwickeln. Der Zustand eines Quantensystems kann auch geschrieben werden:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{n} \sum_{a=0}^{n-1} \sum_{b=0}^{n-1} u_{a,b}(\hat{\rho}) \hat{U}_{a,b}. \quad (3.14)$$

Alle komplexen Zahlen $u_{a,b}$ (bzw. u_c mit $c = na + b$) zusammengenommen beschreiben nun das System vollständig und werden als verallgemeinerter *Kohärenzvektor* \mathbf{u} bezeichnet. Der Begriff des Kohärenzvektors wird im Zusammenhang mit der Entwicklung nach Generatoren der $SU(n)$ -Gruppe eingeführt, siehe dazu [15].

3.4 Eigenwerte und Eigenzustände

Es ist nicht möglich, Eigenwerte und Eigenzustände aller unitärer Operatoren $\hat{U}_{a,b}$ in geschlossener Form anzugeben. Zunächst muss zwischen $a = 0$ und $a \neq 0$ unterschieden werden. Ist n keine Primzahl gibt es außerdem weitere Schwierigkeiten, da es Operatoren mit teilweise entartetem Spektrum gibt. Im Folgenden soll die Menge aller Primzahlen mit \mathbb{P} bezeichnet werden.

Definition 4: Primzahlen

Alle natürlichen Zahlen n , für die es keine Zerlegung der Form

$$n = \prod_{k=1}^{\xi} p_k^{\alpha_k},$$

mit den ξ Primfaktoren p_k von n und ihrer Vielfachheit α_k gibt, gehören zur Menge der Primzahlen \mathbb{P} .

Hier soll auf eine vollständige Herleitung von Eigenwerten und Eigenzuständen zu Gunsten der Übersichtlichkeit verzichtet werden. In Anhang B kann man die vollständige Herleitung finden.

Die Eigenwertgleichung der unitären Operatoren lautet:

$$\hat{U}_{a,b} |\lambda_m\rangle = \lambda_m |\lambda_m\rangle, \quad (3.15)$$

wobei m den Eigenwert bzw. Eigenzustand nummeriert. Die unitären Operatoren haben die Eigenwerte und Eigenzustände:

1. Operatoren mit $\{a = 0, b = 1 \dots n\}$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$\lambda_m = \omega^{bm}, \quad (3.16a)$$

$$|\lambda_m\rangle = |m\rangle. \quad (3.16b)$$

2. Operatoren mit $\{a \neq 0, b = 0 \dots n\}$ und $n \in \mathbb{P}$:

$$\lambda_m = \omega^{ab\frac{n-1}{2}+m}, \quad (3.17a)$$

$$|\lambda_m\rangle = \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} \omega^{\frac{ab}{2}s(s-n)-ms} |s\rangle. \quad (3.17b)$$

3. Operatoren mit $\{a \neq 0, b = 0 \dots n\}$ und $n \notin \mathbb{P}$: Nur Operatoren, deren Indizes die folgenden Relationen erfüllen:

$$a = x_a p_k, \quad b = x_b p_k \quad \text{für } x_a, x_b \in \mathbb{N} \quad (3.18)$$

mit dem Primfaktor p_k von n , haben ein entartetes Spektrum. Eigenwerte und Eigenzustände der betreffenden Operatoren haben die Form:

$$\lambda_m = \omega^{bl} \omega^{\frac{ab}{2}(\frac{nx_a}{a}-1)+\frac{ma}{x_a}}, \quad (3.19a)$$

$$|\lambda_{m,l}\rangle = \frac{a}{nx_a} \sum_{s=0}^{\frac{nx_a}{a}-1} (-1)^{bx_a s} \omega^{\frac{ab}{2}s^2 - \frac{ams}{x_a}} |l + sa\rangle, \quad (3.19b)$$

wobei $\frac{a}{x_a}$ den Entartungsgrad des Spektrums darstellt. Alle nichtentarteten Operatoren haben Eigenwerte und Eigenvektoren analog zu denen unter 2. angegeben.

4 Produktoperatorbasis

Nach der Einführung einer Basis für ein einzelnes Quantensystem im vorhergehenden Kapitel, soll nun ein Quantennetzwerk betrachtet werden. Um die einzelnen Knoten des Netzwerks zu beschreiben, wird die eingeführte unitäre Operatorbasis verwendet. Es reicht jetzt jedoch nicht mehr, nur die Kohärenzvektoren der einzelnen Knoten zur Beschreibung zu verwenden, sondern es müssen zusätzlich Korrelationen der Subsysteme untereinander berücksichtigt werden. Durch diese Verallgemeinerung können Netzwerke *nicht-lokale* Eigenschaften aufweisen.

4.1 Definition der Produktoperatoren

Um den Zustand eines Netzwerks, bestehend aus N Subsystemen mit jeweils n Niveaus, zu beschreiben (hier sollen nur homogene Netzwerke betrachtet werden, d.h. alle Subsysteme haben gleich viele Niveaus), wird ein n^N dimensionaler Produkthilbertraum benötigt:

$$\mathcal{H}^{(d)} = \mathcal{H}^{(n)} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}^{(n)} \quad \text{mit } d = n^N. \quad (4.1)$$

Der Gesamthilbertraum setzt sich als Produkt der N Subsystemhilberträume zusammen. Wie der d -dimensionale Hilbertraum durch die Produktbasis, kann auch der d^2 -dimensionale Liouvillerraum durch eine *Produktoperatorbasis* aufgespannt werden. Diese Basis ist definiert durch ein dyadisches Produkt von N lokalen unitären Einknotenoperatoren \hat{U}_{a_μ, b_μ} .

Definition 5: Produktoperator

Ein Operator, der durch ein Produkt lokaler unitärer Operatoren \hat{U}_{a_μ, b_μ} für jeden Knoten $\mu = 1 \dots N$ definiert werden kann:

$$\hat{C}_{\mathbf{c}} = \hat{C}_{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}} := \bigotimes_{\mu=1}^N \hat{U}_{a_\mu, b_\mu} = \hat{U}_{a_1, b_1} \otimes \dots \otimes \hat{U}_{a_N, b_N}$$

heißt *Produktoperator*.

Hier wird die folgende Vorschrift zur Indizierung des Operators verwendet:

$$\mathbf{c} = \{c_1, \dots, c_N\}, \quad \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} = \{a_1, \dots, a_N; b_1, \dots, b_N\}, \quad (4.2)$$

wobei der Zusammenhang zwischen den Einzelindizes c_μ und den Tupeln $\{a_\mu, b_\mu\}$ wieder durch Gl. (3.1) gegeben ist. Die c_μ oder die Tupel $\{a_\mu, b_\mu\}$ indizieren den unitären Einknotenoperator ($\{a_\mu = 0, b_\mu = 0\}$ oder $c_\mu = 0$ den Einsoperator) des μ -ten Subsystems. Sind alle Indizes null, d.h. $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, ist der Produktoperator identisch zum Einsoperator des Gesamthilbertraums $\hat{\mathbf{1}}^{(n^N)}$.

Ausgehend von Definition 5 kann man den Produktoperator auch umschreiben

$$\begin{aligned}\hat{C}_{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}} &= \sum_{p_1} \cdots \sum_{p_N} \omega^{b_1 p_1} \cdots \omega^{b_N p_N} |p_1 + a_1\rangle \langle p_1| \otimes \cdots \otimes |p_N + a_N\rangle \langle p_N| \\ &= \sum_{\mathbf{p}} \omega^{\mathbf{b} \cdot \mathbf{p}} |\underline{\mathbf{p} + \mathbf{a}}\rangle \langle \mathbf{p}|.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Die abkürzende Schreibweise steht für folgende Ausdrücke: der Punkt im Exponent von ω steht für ein Skalarprodukt $\omega^{\mathbf{b} \cdot \mathbf{p}} = \omega^{b_1 p_1 + \cdots + b_N p_N}$, und die Zustände bezeichnen Zustände in der Produktbasis, wobei die Modulo-Funktion hier komponentenweise verstanden wird, d.h. $|\underline{\mathbf{p} + \mathbf{a}}\rangle = |p_1 + a_1\rangle \otimes \cdots \otimes |p_N + a_N\rangle$. Aus Gl. (4.3) ist die Analogie des Produktoperators im höherdimensionalen Produktraum, zu den im letzten Kapitel eingeführten unitären Operatoren direkt ersichtlich.

Zur weiteren Klassifizierung der Produktoperatoren wird der Begriff des *Clusters* eingeführt. Unter einem Cluster versteht man eine beliebige Selektion von Knoten des Netzwerks. Betrachtet man \mathbf{m} Subsysteme eines Netzwerks, spricht man von einem \mathbf{m} -Cluster ($\mathbf{m} \leq N$). Ein Operator, der auf diese \mathbf{m} -Knoten wirkt, wird *Clusteroperator* genannt. Der Clusteroperator ist ein Produktoperator, wobei für alle \mathbf{m} selektierten Subsysteme ein nichttrivialer unitärer Einknotenoperator steht, für alle anderen $\hat{\mathbf{1}}^{(n)}$.

Definition 6: Clusteroperator

Ein \mathbf{m} -Clusteroperator, der auf die \mathbf{m} Systeme ν, \dots, κ mit den zugehörigen Einknotenoperatoren $\hat{U}_{c_\nu}, \dots, \hat{U}_{c_\kappa}$ wirkt, ist definiert durch:

$$\hat{\mathbf{c}}_{c_\nu, \dots, c_\kappa}^{(\nu, \dots, \kappa)} := \hat{\mathbf{1}}^{(n)} \otimes \cdots \otimes \hat{\mathbf{1}}^{(n)} \otimes \hat{U}_{c_\nu} \otimes \hat{\mathbf{1}}^{(n)} \otimes \cdots \otimes \hat{\mathbf{1}}^{(n)} \otimes \hat{U}_{c_\kappa} \otimes \hat{\mathbf{1}}^{(n)} \otimes \cdots \otimes \hat{\mathbf{1}}^{(n)}$$

Der $\mathbf{m} = 0$ Clusteroperator entspricht dem Einsoperator des Gesamthilbertraums $\hat{\mathbf{1}}^{(n^N)}$. Alle lokalen Eigenschaften der Knoten erhält man durch Betrachtung der $\mathbf{m} = 1$ Clusteroperatoren. Korrelationen von der zweiten bis zur N . Ordnung können durch die höheren Clusteroperatoren bis hin zum $\mathbf{m} = N$ Clusteroperator untersucht werden.

4.2 Eigenschaften der Produktoperatoren

Aus Gl. (3.2) folgt die Anwendung eines Produktoperators auf einen Produktzustand des Gesamthilbertraums:

$$\begin{aligned}\hat{C}_{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}} |\mathbf{i}\rangle &= \hat{U}_{a_1, b_1} \otimes \cdots \otimes \hat{U}_{a_N, b_N} |i_1\rangle \cdots |i_N\rangle \\ &= \hat{U}_{a_1, b_1} |i_1\rangle \otimes \cdots \otimes \hat{U}_{a_N, b_N} |i_N\rangle \\ &= \omega^{\mathbf{b} \cdot \mathbf{i}} |\underline{\mathbf{i} + \mathbf{a}}\rangle.\end{aligned}\quad (4.4)$$

Hieraus ergibt sich auch die Anwendung des adjungierten Operators auf einen Produktzustand:

$$\langle \mathbf{i} | \hat{C}_{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}}^\dagger = \omega^{-\mathbf{b} \cdot \mathbf{i}} \langle \mathbf{i} + \mathbf{a} |. \quad (4.5)$$

Einige wichtige Eigenschaften der Produktoperatoren:

1. **Unitarität:** $\hat{C}_{\mathbf{c}} \hat{C}_{\mathbf{c}}^\dagger = \hat{1}^{(n^N)}$ folgt aus der Unitarität der Einknotenoperatoren.

Beweis:

$$\begin{aligned} \hat{C}_{\mathbf{c}} \hat{C}_{\mathbf{c}}^\dagger &= \hat{U}_{c_1} \otimes \cdots \otimes \hat{U}_{c_N} \hat{U}_{c_1}^\dagger \otimes \cdots \otimes \hat{U}_{c_N}^\dagger \\ &= \hat{U}_{c_1}^\dagger \hat{U}_{c_1} \otimes \cdots \otimes \hat{U}_{c_N}^\dagger \hat{U}_{c_N} \\ &= \hat{1}^{(n)} \otimes \cdots \otimes \hat{1}^{(n)} = \hat{1}^{(n^N)} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Im Beweis wurde verwendet, dass Operatoren zu unterschiedlichen Subsystemen kommutieren. \square

Aus Gl. (3.4) folgt für den adjungierten und den inversen Produktoperator:

$$\hat{C}_{\mathbf{c}}^\dagger = \hat{C}_{\mathbf{c}}^{-1} = \omega^{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} \hat{C}_{\{\mathbf{n}-\mathbf{a}, \mathbf{n}-\mathbf{b}\}}, \quad \text{mit } \mathbf{n} = \{n, \dots, n\}. \quad (4.7)$$

2. **Spur:** Alle Produktoperatoren bis auf den Operator $\hat{C}_{\mathbf{0}}$ sind spurlos:

$$\text{Spur}\{\hat{C}_{\mathbf{c}}\} = \begin{cases} 0 & \mathbf{c} \neq \mathbf{0} \\ n^N & \mathbf{c} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (4.8)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \text{Spur}\{\hat{C}_{\mathbf{c}}\} &= \text{Spur}\{\hat{U}_{c_1} \otimes \cdots \otimes \hat{U}_{c_N}\} \\ &= \text{Spur}_1\{\hat{U}_{c_1}\} \cdots \text{Spur}_N\{\hat{U}_{c_N}\} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Die Spur der unitären Einknotenoperatoren ist immer null, es sei denn es handelt sich um den Operator \hat{U}_0 . Die Spur des Produktoperators kann nur ungleich null sein, wenn kein nichttrivialer unitärer Operator auftaucht, d.h. der Produktoperator der Einsoperator ist. Damit ist die Spurrelation (Gl. (4.8)) gezeigt. \square

Mit Hilfe dieser Spurrelation kann eine Orthogonalitätsrelation für die Produktoperatoren formuliert werden:

$$\text{Spur}\{\hat{C}_{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}} \hat{C}_{\{\mathbf{a}', \mathbf{b}'\}}^\dagger\} = n^N \delta_{\mathbf{a}, \mathbf{a}'} \delta_{\mathbf{b}, \mathbf{b}'}. \quad (4.10)$$

Für die nachstehenden Betrachtungen werden noch einige Operatorrelationen benötigt, die an dieser Stelle kurz eingeführt werden sollen:

$$\hat{C}_{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}} \hat{C}_{\{\mathbf{a}', \mathbf{b}'\}}^\dagger = \omega^{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}'} \hat{C}_{\{\mathbf{a}+\mathbf{a}', \mathbf{b}+\mathbf{b}'\}}, \quad (4.11a)$$

$$(\hat{C}_{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}})^\sigma = \omega^{\frac{1}{2} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \sigma(\sigma-1)} \hat{C}_{\{\underline{\sigma} \mathbf{a}, \underline{\sigma} \mathbf{b}\}}. \quad (4.11b)$$

Die hier im Index der Operatoren auftretenden Modulofunktionen werden komponentenweise verstanden: $\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{a}'} = \{a_1 + a'_1, \dots, a_N + a'_N\}$ und $\underline{\sigma\mathbf{a}} = \{\sigma a_1, \dots, \sigma a_N\}$. Die beiden Relationen folgen aus Gl. (3.7a) und (3.7b). Die Vertauschungsrelationen für die Produktoperatoren ergeben sich hier analog zu denen der unitären Operatoren:

$$[\hat{C}_{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}}, \hat{C}_{\{\mathbf{a}', \mathbf{b}'\}}]_{\pm} = (\omega^{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}'} \pm \omega^{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}'}) \hat{C}_{\{\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{a}'}, \underline{\mathbf{b}} + \underline{\mathbf{b}'}\}}. \quad (4.12)$$

Zwei Produktoperatoren kommutieren, wenn die Bedingung $\underline{\mathbf{b}} \cdot \underline{\mathbf{a}'} - \underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}'} = 0$ erfüllt ist.

4.3 Eigenwerte und Eigenzustände

Mit Hilfe der in Kapitel 3.4 beschriebenen Eigenwerte und Eigenzustände unitärer Operatoren können jetzt die Eigenwerte und Eigenzustände der Produktoperatoren berechnet werden. Die Eigenwertgleichung eines unitären Operators lautet:

$$\hat{U}_c |\lambda_m^c\rangle = \lambda_m^c |\lambda_m^c\rangle. \quad (4.13)$$

Für den Produktoperator soll gelten:

$$\hat{C}_c |\Lambda_m^c\rangle = \Lambda_m^c |\Lambda_m^c\rangle. \quad (4.14)$$

Aus Definition 5 der Produktoperatoren sieht man unmittelbar, wie die Eigenwerte und Eigenzustände der Produktoperatoren mit denen der unitären Operatoren zusammenhängen:

$$\Lambda_m^c = \prod_{\mu=1}^N \lambda_{m_\mu}^{c_\mu}, \quad (4.15a)$$

$$|\Lambda_m^c\rangle = \bigotimes_{\mu=1}^N |\lambda_{m_\mu}^{c_\mu}\rangle. \quad (4.15b)$$

Die Eigenwertgleichung der Produktoperatoren wird durch die Zustände $|\Lambda_m^c\rangle$ erfüllt. Der Indexvektor \mathbf{c} indiziert die beteiligten unitären Operatoren, $\mathbf{m} = \{m_1, \dots, m_N\}$ indiziert die zu den unitären Operatoren gehörigen Eigenzustände. Der Eigenzustand $|\Lambda_m^c\rangle$ ist ein Produktzustand, jeder Knoten ist in einem lokal definierten Zustand $|\lambda_{m_\mu}^{c_\mu}\rangle$. Da die Eigenwerte der unitären Operatoren n -te Einheitswurzeln sind, sind auch die Eigenwerte Λ_m^c der Produktoperatoren n -te Einheitswurzeln, was aus Gl. (4.15a) folgt.

Für den Fall $n \in \mathbb{P}$ haben alle lokalen unitären Operatoren (Definition 3) bis auf den trivialen Operator \hat{U}_0 ein nichtentartetes Spektrum, d.h. man kann auf die Entartungsstruktur des Spektrums der Produktoperatoren schließen: Zu jedem Eigenwert Λ_m^c gehören N_z verschiedene Eigenzustände, d.h. jeder Eigenwert sei N_z -fach entartet. Insgesamt gibt es n^N Eigenzustände zu jedem Produktoperator, d.h. die Operatoren haben vollen Rang. Es gibt allerdings nur n verschiedene Einheitswurzeln als Eigenwerte des Produktoperators, da das Produkt aus Gl. (4.15a) im Raum der n -ten Einheitswurzeln bleibt. Da es zu jedem unitären Operator genau n verschiedene Eigenwerte $\lambda_{m_\mu}^{c_\mu}$ gibt

und alle unitären Operatoren die gleichen Eigenwerte haben, kommt jede Einheitswurzel gleich oft als Eigenwert vor. Aus diesen Überlegungen folgt für den Entartungsgrad:

$$N_z = \frac{n^N}{n} = n^{N-1}. \quad (4.16)$$

Ist n keine Primzahl, so haben einige unitäre Operatoren schon ein entartetes Spektrum, was die Entartung einiger Produktoperatoren erhöhen kann. Später wird diese Tatsache die Gleichbehandlung von Systemen mit $n \in \mathbb{P}$ und $n \notin \mathbb{P}$ verhindern.

4.4 Entwicklung von Dichtematrizen nach Produktoperatoren

Der Hilbertraum des hier betrachteten Quantennetzwerks hat die Dimension n^N . Damit hat der Liouvillerraum die Dimension n^{2N} . Für die Produktoperatoren gilt die Orthogonalitätsrelation Gl. (4.10). Daraus folgt, dass die n^{2N} linear unabhängigen Produktoperatoren eine vollständige orthogonale unitäre Basis des Liouvillerraums darstellen. Jeder Dichteoperator der Dimension $n^N \times n^N$ ist deshalb in diese Basis entwickelbar. Die Produktoperatorentwicklung des Dichteoperators hat die Form:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \sum_{\substack{\mathbf{c} \\ \mathbf{c} \neq \mathbf{0}}} u_{\mathbf{c}}(\hat{\rho}) \hat{C}_{\mathbf{c}} \right) \quad (4.17)$$

mit den Koeffizienten

$$u_{\mathbf{c}}(\hat{\rho}) = \text{Spur} \{ C_{\mathbf{c}}^{\dagger} \hat{\rho} \}. \quad (4.18)$$

Mit den in Definition 6 vorgestellten Clusteroperatoren lässt sich die Bedeutung der einzelnen Terme der Entwicklung noch weiter veranschaulichen. Man betrachtet zunächst in der Produktoperatorentwicklung Gl. (4.17) nur Terme mit Produktoperatoren, die $\mathbf{m} = 1$ -Clusteroperatoren zum μ -ten Subsystem entsprechen, mit den Entwicklungskoeffizienten

$$u_{\{0, \dots, 0, c_{\mu}, 0, \dots, 0\}} = \text{Spur} \{ (\hat{\mathcal{C}}_{c_{\mu}}^{(\mu)})^{\dagger} \hat{\rho} \}. \quad (4.19)$$

Alle diese zum μ -ten Subsystem gehörigen Koeffizienten zusammen entsprechen dem im letzten Kapitel vorgestellten Kohärenzvektor \mathbf{u} des μ -ten Knotens. Nimmt man nun alle Produktoperatoren, die nur aus zwei nichttrivialen Einknotenoperatoren zweier Knoten μ und ν bestehen, also einen $\mathbf{m} = 2$ -Cluster, mit den Entwicklungskoeffizienten

$$u_{\{0, \dots, 0, c_{\mu}, 0, \dots, 0, c_{\nu}, 0, \dots, 0\}} = \text{Spur} \{ (\hat{\mathcal{C}}_{c_{\mu}, c_{\nu}}^{(\mu, \nu)})^{\dagger} \hat{\rho} \} \quad (4.20)$$

erhält man die Korrelationsmatrix zwischen den Knoten μ und ν . Diese Betrachtung kann bis hin zum maximalen Clusteroperator $\mathbf{m} = N$ fortgeführt werden, in dem keine

4.5 Korrelationstensor eines beliebigen Zustands

Hier soll nun das Korrelationstensorelement u_c eines allgemeinen reinen Zustands $|\psi\rangle$ berechnet werden. Dazu ist es sinnvoll, $|\psi\rangle$ in die Produktbasis zu entwickeln:

$$|\psi\rangle = \sum_{\mathbf{i}} |\mathbf{i}\rangle \langle \mathbf{i} | \psi \rangle = \frac{1}{\psi_{\text{norm}}} \sum_{\mathbf{i}} \psi_{\mathbf{i}} |\mathbf{i}\rangle \quad (4.21)$$

mit

$$\psi_{\text{norm}} = \sqrt{\sum_{\mathbf{i}} |\psi_{\mathbf{i}}|^2}. \quad (4.22)$$

Die Dichtematrix eines reinen Zustands berechnet sich nach

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi| = \frac{1}{\psi_{\text{norm}}^2} \sum_{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{j}} \psi_{\mathbf{i}} \psi_{\mathbf{j}}^* |\mathbf{i}\rangle \langle \mathbf{j}|. \quad (4.23)$$

Das Element u_c des Korrelationstensors wird berechnet nach Gl. (4.18) unter Verwendung von Gl. (4.7) (Doppelindex-Notation):

$$\begin{aligned} u_{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}}(\hat{\rho}) &= \text{Spur} \{ \hat{C}_{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}}^\dagger \hat{\rho} \} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \langle \mathbf{k} | \frac{1}{\psi_{\text{norm}}^2} \sum_{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{j}} \psi_{\mathbf{i}} \psi_{\mathbf{j}}^* \hat{C}_{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}}^\dagger |\mathbf{i}\rangle \langle \mathbf{j} | \mathbf{k} \rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \langle \mathbf{k} | \frac{1}{\psi_{\text{norm}}^2} \sum_{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{j}} \psi_{\mathbf{i}} \psi_{\mathbf{j}}^* \omega^{\mathbf{a} \mathbf{b}} \hat{C}_{\{-\mathbf{a}, -\mathbf{b}\}} |\mathbf{i}\rangle \langle \mathbf{j} | \mathbf{k} \rangle \\ &= \frac{1}{\psi_{\text{norm}}^2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{j}} \psi_{\mathbf{i}} \psi_{\mathbf{j}}^* \omega^{\mathbf{a} \mathbf{b}} \omega^{-\mathbf{b} \mathbf{i}} \langle \mathbf{k} | \mathbf{i} - \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{j} | \mathbf{k} \rangle \\ &= \frac{1}{\psi_{\text{norm}}^2} \sum_{\mathbf{i}} \psi_{\mathbf{i}} \psi_{\mathbf{i} - \mathbf{a}}^* \omega^{\mathbf{a} \mathbf{b}} \omega^{-\mathbf{b} \mathbf{i}}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Das Element des Korrelationstensors eines beliebigen Zustands $|\psi\rangle$ ist:

$$u_{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}}(\hat{\rho}) = \frac{1}{\psi_{\text{norm}}^2} \sum_{\mathbf{i}} \psi_{\mathbf{i}} \psi_{\mathbf{i} - \mathbf{a}}^* \omega^{\mathbf{a} \mathbf{b}} \omega^{-\mathbf{b} \mathbf{i}}. \quad (4.25)$$

5 Spezielle reine und gemischte Zustände

Nun sollen die schon des Öfteren erwähnten speziellen reinen und gemischten Zustände, die in dieser Arbeit Verwendung finden, vorgestellt und näher untersucht werden (darunter die schon in Kapitel 2.2 vorgestellten WERNER-Zustände).

5.1 „Katzenzustände“

Eines der bekanntesten Gedankenexperimente ist das in [18] von A. SCHRÖDINGER 1935 beschriebene Katzen-Paradoxon. In einer Kiste befindet sich eine Katze zusammen mit einem instabilen Atom, das mit einer bestimmten Halbwertszeit zerfällt. Zerfällt es, löst es einen Mechanismus aus, der mit Hilfe von Zyanid die Katze sofort tötet. Da man von außen die Katze nicht beobachten kann, weiß man nicht, ob die Katze lebt oder schon tot ist. In diesem Experiment wird die Katze (makroskopisches Objekt) mit dem Atom (mikroskopisches Objekt) verknüpft. Das bedeutet, die Katze wird als quantenmechanisches Objekt interpretiert. Daraus resultiert das oben angesprochene Paradoxon, da Katzen in unserer Welt nicht als quantenmechanische Objekte in Erscheinung treten, hier sich aber, so wird unterstellt, eine Superposition aus „Katze lebt“ und „Katze ist tot“ einstellen kann. Den gesamten Zustand des Systems könnte man wie folgt beschreiben, wenn das Atom anfangs vom angeregten Zustand $|1\rangle_{\text{Atom}}$ in den Grundzustand $|0\rangle_{\text{Atom}}$, und die Katze vom Zustand lebend $|1\rangle_{\text{Katze}}$ in den Zustand tot $|0\rangle_{\text{Katze}}$ übergeht:

$$|\text{Gesamtzustand}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_{\text{Atom}}|1\rangle_{\text{Katze}} + |0\rangle_{\text{Atom}}|0\rangle_{\text{Katze}}). \quad (5.1)$$

Dieser Zustand entspricht dem schon in Kapitel 2.2.1 eingeführten EPR-Zustand (siehe auch [12]) und soll im Folgenden als „Katzenzustand“ bezeichnet werden. Der EPR- oder Katzenzustand ist maximal verschränkt, wie man anhand quantitativer Separabilitätskriterien überprüfen kann (siehe Kapitel 6).

Wie in Kapitel 2.2.2 dargestellt, gibt es eine vollständige orthonormale Basis maximal verschränkter Zustände. Diese Zustände können durch Anwendung lokaler unitärer Transformationen auf den Zustand Gl. (5.1) erzeugt werden. Lokale unitäre Transformationen, repräsentiert durch die in Kapitel 4 eingeführten Produktoperatoren, verändern Entropie und Verschränkung der Zustände nicht.

5.2 Verallgemeinerte Katzenzustände

Es ist möglich, die Definition der Katzenzustände (Gl. (5.1)) auf beliebig viele Knoten N eines homogenen Netzwerks mit beliebig vielen Niveaus n auszudehnen:

$$|\text{Katze}\rangle_{\{0,0\}} := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \bigotimes_{\mu=0}^N |i\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} |i, \dots, i\rangle. \quad (5.2)$$

Hierbei wird in Anlehnung an die Produktoperatoren der Standardkatzenzustand mit $\{0, 0\}$ indiziert. Alle anderen maximal verschränkten Zustände können durch Anwendung des entsprechenden Produktoperators auf diesen Standardzustand erzeugt werden:

$$|\text{Katze}\rangle_{\{a,b\}} = \hat{C}_{\{a,b\}} |\text{Katze}\rangle_{\{0,0\}}. \quad (5.3)$$

Es soll hier noch darauf verwiesen werden, dass es n^{2N} Produktoperatoren gibt, die Dimension des Hilbertraums aber nur n^N ist, d.h. nicht alle der so erzeugten Zustände sind wirklich linear unabhängig. Die Dichtematrix des Standardzustands hat die Form:

$$\hat{\rho}_{\text{Katze}} = |\text{Katze}\rangle_{\{0,0\}} \langle \text{Katze}|_{\{0,0\}} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} |i, \dots, i\rangle \langle j, \dots, j|. \quad (5.4)$$

Für detailliertere Informationen zu maximal verschränkten Zuständen soll auf ergänzende Literatur [22, 15] verwiesen werden.

Es ist möglich, den Katzenzustand - wie in Kapitel 4.4 beschrieben - nach Produktoperatoren zu entwickeln. Die Dichtematrix des Katzenzustands hat dann die folgende Form:

$$\hat{\rho}_{\text{Katze}} = \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \sum_{\substack{\mathbf{c} \\ \mathbf{c} \neq \mathbf{0}}} u_{\mathbf{c}}(\hat{\rho}_{\text{Katze}}) \hat{C}_{\mathbf{c}} \right) \quad (5.5)$$

mit dem Korrelationstensor $\mathfrak{U} = (u_{\mathbf{c}}(\hat{\rho}_{\text{Katze}}))$. Diese Entwicklung wird sich im Weiteren als günstig erweisen. Das Korrelationstensorelement berechnet sich nach Gl. (4.18):

$$\begin{aligned} u_{\mathbf{c}}(\hat{\rho}_{\text{Katze}}) &= \text{Spur} \{ \hat{C}_{\mathbf{c}}^\dagger \hat{\rho}_{\text{Katze}} \} \\ &= \text{Spur} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \hat{C}_{\mathbf{c}}^\dagger |i, \dots, i\rangle \langle j, \dots, j| \right\} \\ &\stackrel{(4.7)}{=} \frac{1}{n} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{\mathbf{a}\mathbf{b}} \omega^{-(ib_1 + \dots + ib_N)} \langle \mathbf{k} | \underline{i - a_1}, \dots, \underline{i - a_N} \rangle \langle \mathbf{j} | \mathbf{k} \rangle \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{\mathbf{a}\mathbf{b}} \omega^{-(ib_1 + \dots + ib_N)} \delta_{k_1, \underline{i - a_1}} \dots \delta_{k_N, \underline{i - a_N}} \cdot \delta_{j, k_1} \dots \delta_{j, k_N} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{\mathbf{a}\mathbf{b}} \omega^{-(ib_1 + \dots + ib_N)} \delta_{j, \underline{i - a_1}} \dots \delta_{j, \underline{i - a_N}}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Mit dem ersten KRONECKER-Delta kollabiert die Summe über j . Aus den anderen KRONECKER-Deltas folgt dann, dass alle a_μ gleich sein müssen, damit der Koeffizient überhaupt von null verschieden sein kann. Betrachtet man dann noch die Summe über i , die, wenn $b_1 + \dots + b_N$ kein Vielfaches von n ist, mit Hilfe der geometrischen Reihe berechnet werden kann, so erhält man:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega^{-i(b_1+\dots+b_N)} = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n-1} 1 = n & \sum_{\mu=1}^N b_\mu = 0 \\ \sum_{i=0}^{n-1} \omega^{i(b_1+\dots+b_N)} = \frac{\omega^{n(b_1+\dots+b_N)-1}-1}{\omega-1} = 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.7)$$

Aus diesen Überlegungen folgt, dass das Korrelationstensorelement nur von null verschieden ist und den Wert $\omega^{\mathbf{a}\mathbf{b}} = \omega^{a(b_1+\dots+b_N)} = 1$ hat, wenn die Indizes des Produktoperators folgende Bedingungen erfüllen: alle a_μ müssen gleich sein und für die b_μ gilt die Beziehung $\sum_{\mu=1}^N b_\mu = 0$. Damit kann man die Produktoperatorentwicklung des verallgemeinerten Katzenszustands umschreiben:

$$\hat{\rho}_{\text{Katze}} = \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \sum_{a=0}^{n-1} \sum_{\mathbf{b}} \hat{C}_{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}} \delta(\sum_{\mu=1}^N b_\mu = 0) \right), \quad (5.8)$$

wobei der Term $a = 0, \mathbf{b} = \mathbf{0}$ in der Summe nicht mitgenommen wird. Die Bedingung, dass alle a gleich sind, wird hier durch die Forderung $\mathbf{a} = \{a, \dots, a\}$ berücksichtigt, die zweite Bedingung für sämtliche b_μ wird als δ -Funktion formuliert.

5.3 Verallgemeinerter WERNER-Zustand

Die bis jetzt angegebenen Zustände waren alle rein, d.h. es ist möglich, sie als Vektoren im Hilbertraum darzustellen. Im Folgenden betrachten wir eine spezielle Klasse gemischter Zustände, die so genannten WERNER-Zustände [14], die eine Mischung des Katzenszustands (also des maximal verschränkten Zustands) mit dem total gemischten Zustand mittels eines Mischungsparameters $0 \leq \epsilon \leq 1$ darstellen. Zunächst werden hier Netzwerke bestehend aus zwei Subsystemen mit zwei Niveaus betrachtet; die WERNER-Zustände werden durch die Dichtematrix

$$\hat{\rho}_{\text{WERNER}} = \frac{1}{4}(1 - \epsilon)\hat{1}^{(4)} + \epsilon \hat{\rho}_{\text{Katze}} \quad (5.9)$$

beschrieben. Für $\epsilon = 0$ ist $\hat{\rho}_{\text{WERNER}}$ der total gemischte Zustand, während für $\epsilon = 1$ $\hat{\rho}_{\text{WERNER}}$ der Katzenszustand ist. Hier soll explizit darauf hingewiesen werden, dass die WERNER-Zustände nur eine kleine Untergruppe der Menge aller gemischten Zustände darstellen.

Auch die WERNER-Zustände können mit Hilfe der verallgemeinerten Katzenszustände (Gl. (5.2)) auf N Subsysteme mit n Niveaus erweitert werden:

$$\hat{\rho}_{\text{WERNER}}^{(n^N)} = \frac{1}{n^N}(1 - \epsilon)\hat{1}^{(n^N)} + \epsilon \hat{\rho}_{\text{Katze}}^{(n^N)}. \quad (5.10)$$

Im weiteren Verlauf sollen diese Zustände als verallgemeinerte WERNER-Zustände bezeichnet werden. Untersucht man zunächst die Produktoperatorentwicklung des verallgemeinerten WERNER-Zustands

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{\text{WERNER}}^{(n^N)} &= \frac{1}{n^N}(1 - \epsilon)\hat{1} + \epsilon \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \sum_{\mathbf{c}} u_{\mathbf{c}}(\hat{\rho}_{\text{Katze}}) \hat{C}_{\mathbf{c}} \right) \\ &= \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \epsilon \sum_{\mathbf{c}} u_{\mathbf{c}}(\hat{\rho}_{\text{Katze}}) \hat{C}_{\mathbf{c}} \right)\end{aligned}\quad (5.11)$$

und vergleicht diese mit der des verallgemeinerten Katzenzustands (Gl. (5.5)), findet man, dass alle Korrelationen mit ϵ skaliert sind.

5.4 „Blasse“ Zustände

Es ist möglich, noch eine weitere Verallgemeinerung vorzunehmen. Es werden nun Zustände betrachtet der Form:

$$\hat{\rho}_{\text{blasse}} = \frac{1}{n^N}(1 - \epsilon)\hat{1} + \epsilon \hat{\rho}_{\text{rein}}. \quad (5.12)$$

An Stelle des Katzenzustands wird jetzt ein beliebiger, reiner Zustand $|\psi\rangle$ mit der Dichtematrix $\hat{\rho}_{\text{rein}} = |\psi\rangle\langle\psi|$ verwendet.

Wie die WERNER-Zustände kann auch dieser Zustand nach Produktoperatoren, unter Verwendung der Produktoperatorentwicklung des allgemeinen Zustands $\hat{\rho}_{\text{rein}}$, entwickelt werden (siehe Kapitel 4.5). Diese Zustände heißen „blasse“, da alle Korrelationen mit ϵ nach unten skaliert sind.

Diese Zustandsklasse enthält als Spezialfall sämtliche WERNER-Zustände, trotzdem gibt es noch weitaus mehr gemischte Zustände, die nicht zu dieser Klasse gehören.

6 Separabilität

Schon einige Male wurden in dieser Arbeit die Begriffe *Verschränkung* und *Separabilität* verwendet. In diesem Kapitel sollen diese wichtigen Eigenschaften quantenmechanischer Zustände definiert werden.

6.1 Separabilität und Verschränkung

In einem Quantennetzwerk, bestehend aus N Subsystemen mit jeweils n Niveaus, kann es zur Verschränkung der Subsysteme untereinander kommen.

Definition 7: Separabilität und Verschränkung

Verschränkung wird als Gegenteil von Separabilität definiert:

$$\hat{\rho} \text{ ist separabel} \Leftrightarrow \hat{\rho} \text{ ist nicht verschränkt.}$$

Separable Zustände lassen sich in Produktzustände zerlegen, weshalb die Separabilität über die Zerlegbarkeit von Zuständen in Produktzustände definiert wird.

Definition 8: Separabler Zustand

Ein vollständig *separabler Zustand* ist definiert als konvexe Kombination von Tensorprodukten:

$$\hat{\rho} = \sum_i p(i) \bigotimes_{\mu=1}^N \hat{\rho}^{(\mu)}(i)$$

mit dem Gesamtzustand $\hat{\rho}$ und der Dichtematrix des μ -ten Subsystems $\hat{\rho}^{(\mu)}$ im Hilbertraum $\mathcal{H}^{(n)}$.

Der separable Zustand $\hat{\rho}$ ist eine Mischung von Produktzuständen:

$$\hat{\rho}_{\text{P.z.}} = \bigotimes_{\mu=1}^N \hat{\rho}^{(\mu)}(i) \tag{6.1}$$

mit den Gewichten $p(i)$. Bei einem Produktzustand ist jedes Subsystem lokal in einem definierten Zustand, es liegen also keine Verschränkungen vor. Eine Mischung solch

separabler Zustände kann keine Verschränkung erzeugen. Für verschränkte Zustände, Zustände mit nichtlokalen Eigenschaften, gibt es keine Zerlegung nach Definition 8.

Die Zerlegung nach Definition 8 ist nicht eindeutig, d.h. es gibt viele unterschiedliche Zerlegungen in verschiedene Produktzustände, die zum gleichen Gesamtzustand führen. Dies hat zur Folge, dass es recht schwierig ist zu entscheiden, ob ein Zustand des Gesamthilbertraums separabel ist oder nicht. Bis jetzt (2002) gibt es noch kein allgemein gültiges Kriterium für Separabilität, und auch die direkte Konstruktion einer Zerlegung (wie in Definition 8) ist auf Grund ihrer Mehrdeutigkeit schwierig durchführbar.

6.2 Separabilitätskriterien

Um entscheiden zu können, ob ein Zustand separabel oder verschränkt ist, benötigt man ein Separabilitätskriterium. Hier sollen einige Separabilitätskriterien für einzelne Zustandsgruppen vorgestellt werden. Schon in der Einleitung wurde angesprochen, dass eine große Menge an notwendigen als auch an hinreichenden Kriterien zur Verfügung steht, von denen allerdings viele im konkreten Fall nicht operabel sind. Deshalb sollen hier nur die für diese Arbeit nützlichen Kriterien vorgestellt werden. Eine Zusammenstellung der meisten bis jetzt erarbeiteten Kriterien kann in [7] gefunden werden.

6.2.1 Reine Zustände

Für reine Zustände ist es nicht schwierig zu unterscheiden, ob ein separabler oder ein verschränkter Zustand vorliegt. Man berechnet direkt die reduzierten Dichtematrizen. Befinden sich die einzelnen Subsysteme auch in reinen Zuständen, ist der Gesamtzustand separabel. Ob die einzelnen Subsysteme in reinen Zuständen sind, kann mit der Spur des Dichtematrixquadrats entschieden werden.

Theorem 3:

Die Dichtematrix des μ -ten Subsystems ist: $\hat{\rho}_\mu = \text{Spur}_{\{\nu, \kappa, \dots\}}\{\hat{\rho}\}$. Die Dichtematrix $\hat{\rho}$ ist genau dann separabel, wenn für $\mu = 1, \dots, N$ gilt:

$$\text{Spur}\{\hat{\rho}_\mu^2\} = 1.$$

Für reine Zustände gibt es außerdem noch eine große Zahl auch quantitativer Separabilitätskriterien, die in der Lage sind, den Grad der Verschränkung zu messen z.B. die lokale v. NEUMANN Entropie (siehe dazu [7]).

6.2.2 Gemischte Zustände

Für gemischte Zustände ist es weit schwieriger zu entscheiden, ob ein verschränkter oder separabler Zustand vorliegt. Da kein allgemein gültiges Kriterium für Separabilität existiert, gibt es eine große Zahl an notwendigen und hinreichenden Kriterien, mit deren Hilfe man Zustände auf Verschränkung untersuchen kann.

PERES-Kriterium (PPT-Kriterium)

Ein notwendiges Separabilitätskriterium ist das von PERES [8] entwickelte Kriterium positiver Partiielltransponierter (PPT-Kriterium):

Theorem 4:

Ist $\hat{\rho}$ separabel, folgt, dass *alle* partielltransponierten Matrizen *positiv*, d.h. echte Zustände sind:

$$\hat{\rho} \text{ separabel} \Rightarrow \hat{\rho}^{T_\nu} \geq 0.$$

$\hat{\rho}^{T_\nu}$ bezeichnet die partielltransponierte Matrix bezüglich des ν -ten Subsystems. Stellt man die Dichtematrix $\hat{\rho}$ in der Produktbasis dar

$$\hat{\rho} = \sum_i \sum_j \langle i | \hat{\rho} | j \rangle | i \rangle \langle j |, \quad (6.2)$$

errechnet sich die Partiielltransponierte des ν -ten Subsystem nach

$$\hat{\rho}^{T_\nu} = \sum_i \sum_j \langle i | \hat{\rho} | j \rangle | i_1, \dots, j_\nu, \dots, i_N \rangle \langle j_1, \dots, i_\nu, \dots, j_N |. \quad (6.3)$$

$\hat{\rho}^{T_\nu} \geq 0$ bedeutet hier, dass die Matrix positiv definit ist, d.h. alle Eigenwerte größer oder gleich null sind. Diese Eigenschaft kann direkt überprüft werden, indem man die Eigenwerte auf Positivität untersucht, oder indem man die CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung verwendet (siehe Kapitel 2.1). Alle Zustände, die das PERES-Kriterium erfüllen, also deren Partiielltransponierte sämtlich positiv sind, nennt man Positiv-Partiielltransponierte-Zustände oder PPT-Zustände.

Das PERES-Kriterium ist vollständig scharf (notwendig und hinreichend) für 2×2 und 2×3 Systeme. Für alle größeren Netzwerke ist das Kriterium nur ein notwendiges Separabilitätskriterium. Es gibt nämlich Zustände, die das Kriterium erfüllen - d.h. alle partielltransponierten Matrizen sind positiv - aber trotzdem nicht separabel sind. Solche Zustände nennt man gebunden-verschränkte-Zustände. Andererseits gilt, dass der Gesamtzustand mit Sicherheit verschränkt ist, wenn nur eine partielltransponierte Matrix nicht positiv ist. Zur Veranschaulichung sollen die verschiedenen, hier vorgestellten Zustände, in einem qualitativen Bild dargestellt werden, siehe Abbildung 6.1. Es wird aber darauf verwiesen, dass aus dieser Abbildung keinerlei Informationen über die tatsächliche Struktur und Größe des Zustandsraums sowie die Lage der Grenzen gewonnen werden können.

Korrelationstensor-kriterium

Lediglich ein weiteres, allerdings nur hinreichendes Kriterium für Separabilität, soll an dieser Stelle vorgestellt werden: das bisher schärfste Separabilitätskriterium (siehe [6]). Der in Kapitel 4 eingeführte Korrelationstensor enthält sämtliche Informationen über

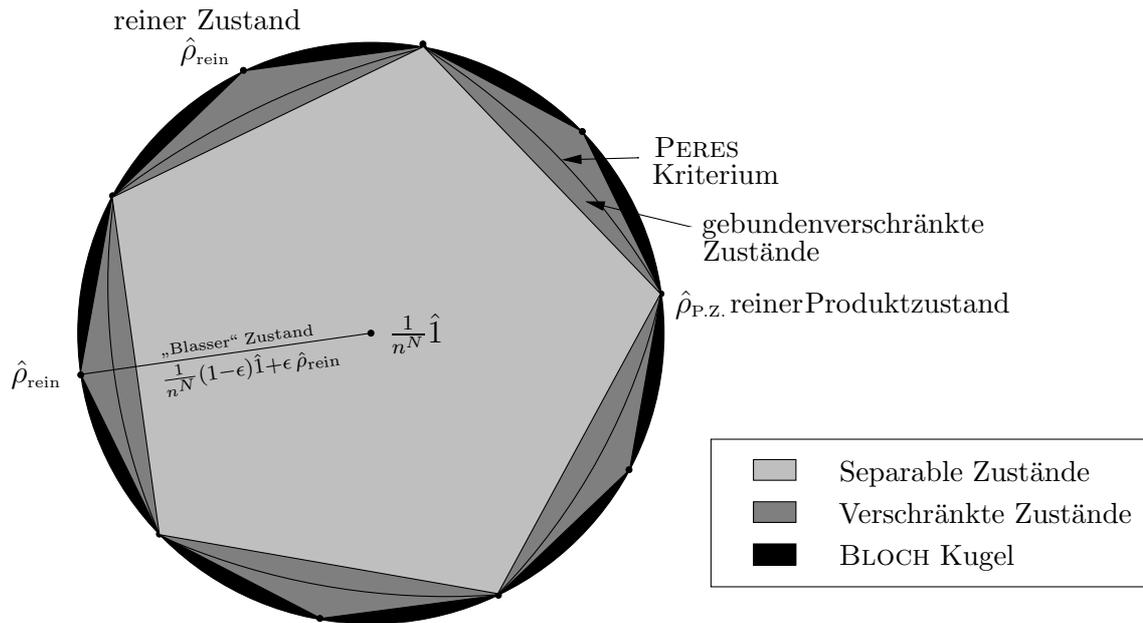


Abb. 6.1: Struktur des Zustandsraums (vgl. [7]). Die eingezeichnete PERES-Grenze ist nur schematisch dargestellt; das PPT-Kriterium ist für alle Zustände innerhalb dieser Grenze erfüllt. Die gebundenverschränkten-Zustände erfüllen zwar das Kriterium, sind jedoch trotzdem verschränkt. Die „blassen“ Zustände liegen in Abhängigkeit von ϵ auf Verbindungslinien zwischen reinen Zuständen und dem total gemischten Zustand in der Mitte.

das System. Es ist möglich, ein Kriterium basierend auf dem Korrelationstensor zu definieren.

Theorem 5:

Gilt für den Korrelationstensor \mathcal{U} eines Systems im Zustand $\hat{\rho}$ bestehend aus zwei Subsystemen:

$$\sum_{\mathbf{c}} |u_{\mathbf{c}}| \leq 2 \quad \Rightarrow \hat{\rho} \text{ separabel.}$$

Leider greift dieses Kriterium meist nur in einer sehr engen Umgebung des total gemischten Zustands und ist nur für Systeme bestehend aus zwei Subsystemen gültig.

6.3 PPT-Kriterium für den verallgemeinerten WERNER-Zustand

Für den verallgemeinerten WERNER-Zustand (Gl. (5.10)) ist es gelungen zu zeigen, dass das PERES-Kriterium für beliebig viele Subsysteme und beliebig viele Niveaus sowohl hinreichend als auch notwendig ist (siehe [6, 25]). Dabei wird zunächst ein notwendiges Separabilitätskriterium verwendet: das PERES-Kriterium. Aus diesem erhält man eine Bedingung für Separabilität, die in den WERNER-Zustand eingesetzt wird. Der so

erhaltene Zustand wird dann explizit separiert.

Hier soll also zunächst das PPT-Kriterium für verallgemeinerte WERNER-Zustände berechnet werden.

PERES-Kriterium für verallgemeinerte WERNER-Zustand

Zunächst wird für die verallgemeinerten WERNER-Zustände $\hat{\rho}$ die Partiielltransponierte von Gl. (5.10) berechnet und auf Positivität mit Hilfe der CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung untersucht (Theorem 1). Folgende Abkürzungen werden dabei verwendet:

$$|\mathbf{i}\rangle = |i_1, \dots, i_\nu, \dots, i_N\rangle, \quad (6.4a)$$

$$|\mathbf{j}\rangle = |j_1, \dots, j_\nu, \dots, j_N\rangle \text{ analog } |\mathbf{k}\rangle \text{ und } |\mathbf{m}\rangle, \quad (6.4b)$$

$$|\tilde{\mathbf{i}}\rangle = |i_1, \dots, j_\nu, \dots, i_N\rangle, \quad (6.4c)$$

$$|\tilde{\mathbf{j}}\rangle = |j_1, \dots, i_\nu, \dots, j_N\rangle \text{ analog } |\tilde{\mathbf{k}}\rangle \text{ und } |\tilde{\mathbf{m}}\rangle, \quad (6.4d)$$

mit denen sich die Partiielltransponierte bezüglich Subsystem ν als

$$\hat{\rho}^{T_\nu} = \sum_i \sum_j \hat{\rho}_{i,j} |\tilde{\mathbf{i}}\rangle \langle \tilde{\mathbf{j}}| \quad (6.5)$$

schreiben lässt. Die zu untersuchende CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung hat nun die folgende Form:

$$\langle \mathbf{k} | \hat{\rho}^{T_\nu} | \mathbf{k} \rangle \langle \mathbf{m} | \hat{\rho}^{T_\nu} | \mathbf{m} \rangle \geq |\langle \mathbf{k} | \hat{\rho}^{T_\nu} | \mathbf{m} \rangle|^2. \quad (6.6)$$

Berechnung der rechten Seite von Gl. (6.6):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k} | \hat{\rho}^{T_\nu} | \mathbf{m} \rangle &= \sum_i \sum_j \hat{\rho}_{i,j} \langle \mathbf{k} | \tilde{\mathbf{i}} \rangle \langle \tilde{\mathbf{j}} | \mathbf{m} \rangle \\ &= \sum_i \sum_j \hat{\rho}_{i,j} \delta_{\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{i}}} \delta_{\tilde{\mathbf{j}}, \mathbf{m}} \\ &= \hat{\rho}_{\tilde{\mathbf{k}}, \tilde{\mathbf{m}}} \\ &= \langle \tilde{\mathbf{k}} | \left(\frac{1}{n^N} (1 - \epsilon) \hat{1} + \epsilon \hat{\rho}_{\text{Katze}} \right) | \tilde{\mathbf{m}} \rangle. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Der $\hat{1}$ -Operator hat keine Nichtdiagonalelemente, d.h. man muss nur den zweiten Summanden betrachten, wobei die Dichtematrix des verallgemeinerten Katzenzustands (Gl. (5.4)) verwendet wird:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathbf{k}} | \epsilon \hat{\rho}_{\text{Katze}} | \tilde{\mathbf{m}} \rangle &= \langle \tilde{\mathbf{k}} | \frac{\epsilon}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} |i, \dots, i\rangle \langle j, \dots, j| \tilde{\mathbf{m}} \rangle \\ &= \frac{\epsilon}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{\tilde{\mathbf{k}}, \{i, \dots, i\}} \delta_{\{j, \dots, j\}, \tilde{\mathbf{m}}}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Man sieht, dass alle nichtverschwindenden Elemente hier $\frac{\epsilon}{n}$ sind. Jetzt berechnet man die Terme der linken Seite von Gl. (6.6) zu einem dieser nichtverschwindenden Elemente z.B. $|\tilde{\mathbf{k}}\rangle = |i, \dots, i\rangle$ und $|\tilde{\mathbf{m}}\rangle = |j, \dots, j\rangle$, d.h. $|\mathbf{k}\rangle = |i, \dots, j, \dots, i\rangle$ und $|\mathbf{m}\rangle = |j, \dots, i, \dots, j\rangle$, wobei die Transposition an der ν -ten Stelle stattgefunden hat:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{k} | \hat{\rho}^{T\nu} | \mathbf{k} \rangle &= \sum_{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{j}} \hat{\rho}_{\mathbf{i}, \mathbf{j}} \langle i, \dots, j, \dots, i | \tilde{\mathbf{i}} \rangle \langle \tilde{\mathbf{j}} | i, \dots, j, \dots, i \rangle \\
&= \hat{\rho}_{\{i, \dots, j, \dots, i\}, \{i, \dots, j, \dots, i\}} \\
&= \langle i, \dots, j, \dots, i | \left(\frac{1}{n^N} (1 - \epsilon) \hat{1} + \epsilon \hat{\rho}_{\text{Katze}} \right) | i, \dots, j, \dots, i \rangle \\
&= \frac{1}{n^N} (1 - \epsilon) + \epsilon \langle i, \dots, j, \dots, i | \hat{\rho}_{\text{Katze}} | i, \dots, j, \dots, i \rangle \\
&= \frac{1}{n^N} (1 - \epsilon) \\
&\quad + \epsilon \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-1} \langle i, \dots, j, \dots, i | l, \dots, l \rangle \langle p, \dots, p | i, \dots, j, \dots, i \rangle. \tag{6.9}
\end{aligned}$$

Da der letzte Term immer null ist, erhält man also das Matrixelement $\frac{1}{n^N} (1 - \epsilon)$. Analog berechnet sich der zweite Term der linken Seite von Gl. (6.6) mit Vektor $|\mathbf{m}\rangle$. Setzt man alles in die CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung (6.6) ein, erhält man:

$$\left(\frac{1}{n^N} (1 - \epsilon) \right)^2 \geq \left| \frac{\epsilon}{n} \right|^2. \tag{6.10}$$

Diese Ungleichung lässt sich nach ϵ auflösen, und man erhält damit die *notwendige* Separabilitätsbedingung:

$$\epsilon \leq \frac{1}{n^{N-1} + 1} := \epsilon_{\text{grenz}}. \tag{6.11}$$

Alle Zustände mit größerem ϵ als $\epsilon_{\text{grenz}} = \frac{1}{n^{N-1} + 1}$ sind in jedem Fall verschränkt. Ob Zustände mit einem $\epsilon \leq \epsilon_{\text{grenz}}$ separabel sind, kann hier noch nicht entschieden werden. Dazu müßte noch ein hinreichendes Kriterium untersucht werden. Das oben beschriebene Korrelationstensor-kriterium versagt hier jedoch. Die Vorgehensweise wäre nun zu versuchen, den Zustand mit ϵ_{grenz} explizit zu separieren. Dies ist mit den später in dieser Arbeit vorgestellten Paketen (siehe Kapitel 7) und einem Mechanismus zur Herstellung von WERNER-Zuständen an der Separabilitätsgrenze möglich.

6.4 PPT-Kriterium „blasser“ Zustände

Auch für den allgemeinen „blassen“ Zustand $\hat{\rho}_{\text{blass}}$ (Gl. (5.12)) ist es möglich, das PERES-Kriterium zu untersuchen:

$$\hat{\rho}_{\text{blass}} = \frac{1}{n^N} (1 - \epsilon) \hat{1} + \epsilon \hat{\rho}_{\text{rein}} = \frac{1}{n^N} (1 - \epsilon) \hat{1} + \epsilon |\psi\rangle \langle \psi|. \tag{6.12}$$

Der reine Zustand $|\psi\rangle$ lässt sich in die Produktbasis entwickeln

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\psi_{\text{norm}}} \sum_{\mathbf{i}} \psi_{\mathbf{i}} |\mathbf{i}\rangle, \quad (6.13)$$

woraus sich die Dichtematrix des „blassen“ Zustands ergibt:

$$\hat{\rho}_{\text{blass}} = \frac{1}{n^N} (1 - \epsilon) \hat{1} + \frac{\epsilon}{\psi_{\text{norm}}^2} \sum_{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{j}} \psi_{\mathbf{i}} \psi_{\mathbf{j}}^* |\mathbf{i}\rangle \langle \mathbf{j}|. \quad (6.14)$$

Für diese Dichtematrix muss jetzt die Partiielltransponierte berechnet werden. Dazu werden die Definitionen aus Gl. (6.4a)-(6.4d) verwendet:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\text{blass}}^{T_\nu} &= \sum_{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{j}} \hat{\rho}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} |\tilde{\mathbf{i}}\rangle \langle \tilde{\mathbf{j}}| \\ &= \sum_{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{j}} \langle \mathbf{i} | \hat{\rho}_{\text{blass}} | \mathbf{j} \rangle |\tilde{\mathbf{i}}\rangle \langle \tilde{\mathbf{j}}| \\ &= \sum_{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{j}} \langle \mathbf{i} | \left(\frac{1}{n^N} (1 - \epsilon) \hat{1} + \frac{\epsilon}{\psi_{\text{norm}}^2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{m}} \psi_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{m}}^* |\mathbf{k}\rangle \langle \mathbf{m}| \right) | \mathbf{j} \rangle |\tilde{\mathbf{i}}\rangle \langle \tilde{\mathbf{j}}| \\ &= \frac{1}{n^N} (1 - \epsilon) \hat{1} + \frac{\epsilon}{\psi_{\text{norm}}^2} \sum_{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{j}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{m}} \psi_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{m}}^* \langle \mathbf{i} | \mathbf{k} \rangle \langle \mathbf{m} | \mathbf{j} \rangle |\tilde{\mathbf{i}}\rangle \langle \tilde{\mathbf{j}}| \\ &= \frac{1}{n^N} (1 - \epsilon) \hat{1} + \frac{\epsilon}{\psi_{\text{norm}}^2} \sum_{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{j}} \psi_{\mathbf{i}} \psi_{\mathbf{j}}^* |\tilde{\mathbf{i}}\rangle \langle \tilde{\mathbf{j}}|. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Nach dem PERES-Kriterium muss diese Matrix wieder positiv definit sein, was auch hier mit der CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung (Definition 1) gezeigt wird. Zunächst müssen die Matrixelemente berechnet werden:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k} | \hat{\rho}_{\text{blass}} | \mathbf{m} \rangle &= \frac{1}{n^N} (1 - \epsilon) \langle \mathbf{k} | \hat{1} | \mathbf{m} \rangle + \frac{\epsilon}{\psi_{\text{norm}}^2} \sum_{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{j}} \psi_{\mathbf{i}} \psi_{\mathbf{j}}^* \langle \mathbf{k} | \tilde{\mathbf{i}} \rangle \langle \tilde{\mathbf{j}} | \mathbf{m} \rangle \\ &= \frac{\epsilon}{\psi_{\text{norm}}^2} \sum_{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{j}} \psi_{\mathbf{i}} \psi_{\mathbf{j}}^* \delta_{\mathbf{k},\tilde{\mathbf{i}}} \delta_{\tilde{\mathbf{j}},\mathbf{m}} \\ &= \frac{\epsilon}{\psi_{\text{norm}}^2} \sum_{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{j}} \psi_{\mathbf{i}} \psi_{\mathbf{j}}^* \delta_{k_1,i_1} \cdots \delta_{k_r,j_r} \cdots \delta_{k_N,i_N} \delta_{j_1,m_1} \cdots \delta_{i_r,m_r} \cdots \delta_{j_N,m_N} \\ &= \frac{\epsilon}{\psi_{\text{norm}}^2} \psi_{\tilde{\mathbf{k}}} \psi_{\tilde{\mathbf{m}}}^*, \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k} | \hat{\rho}_{\text{blass}} | \mathbf{k} \rangle &= \frac{1}{n^N} (1 - \epsilon) + \frac{\epsilon}{\psi_{\text{norm}}^2} \sum_{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{j}} \psi_{\mathbf{i}} \psi_{\mathbf{j}}^* \langle \mathbf{k} | \tilde{\mathbf{i}} \rangle \langle \tilde{\mathbf{j}} | \mathbf{k} \rangle \\ &= \frac{1}{n^N} (1 - \epsilon) + \frac{\epsilon}{\psi_{\text{norm}}^2} \sum_{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{j}} \psi_{\mathbf{i}} \psi_{\mathbf{j}}^* \\ &\quad \delta_{k_1,i_1} \cdots \delta_{k_r,j_r} \cdots \delta_{k_N,i_N} \cdot \delta_{j_1,k_1} \cdots \delta_{i_r,k_r} \cdots \delta_{j_N,k_N} \\ &= \frac{1}{n^N} (1 - \epsilon) + \frac{\epsilon}{\psi_{\text{norm}}^2} \psi_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}}^*. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Das letzte Matrixelement berechnet sich natürlich analog zum vorletzten. Jetzt kann man diese Matrixelemente in die CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung einsetzen:

$$\left| \frac{\epsilon}{\psi_{\text{norm}}^2} \psi_{\tilde{\mathbf{k}}} \psi_{\tilde{\mathbf{m}}}^* \right|^2 \leq \left(\frac{1}{n^N} (1 - \epsilon) + \frac{\epsilon}{\psi_{\text{norm}}^2} |\psi_{\mathbf{k}}|^2 \right) \left(\frac{1}{n^N} (1 - \epsilon) + \frac{\epsilon}{\psi_{\text{norm}}^2} |\psi_{\mathbf{m}}|^2 \right). \quad (6.18)$$

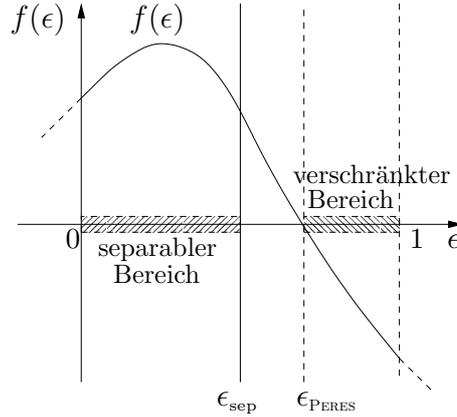


Abb. 6.2: Schematische Darstellung der Funktion $f(\epsilon)$.

Dies kann zu einer in ϵ quadratischen Ungleichung der Form $f(\epsilon) \geq 0$ umgeformt werden. Zur Veranschaulichung diene die schematische Abbildung 6.2. Betrachtet man die Gleichheit und berechnet ϵ aus dieser Gleichung, erhält man zwei Lösungen, von denen eine kleiner null ist und damit ausscheidet, da gilt $0 \leq \epsilon \leq 1$. Das Ergebnis ist somit:

$$\epsilon = \frac{2 \psi_{\text{norm}}^2}{2 \psi_{\text{norm}}^2 - n^N \left(|\psi_{\mathbf{k}}|^2 + |\psi_{\mathbf{m}}|^2 - \sqrt{(|\psi_{\mathbf{k}}|^2 - |\psi_{\mathbf{m}}|^2)^2 + 4 |\psi_{\tilde{\mathbf{k}}}|^2 |\psi_{\tilde{\mathbf{m}}}|^2} \right)}. \quad (6.19)$$

Um nun das tatsächliche ϵ_{PERES} zu erhalten, muss man bezüglich aller möglichen \mathbf{k} bzw. \mathbf{m} minimieren. Das kleinste ϵ , das man erhält, ist das tatsächliche ϵ_{PERES} .

$$\epsilon_{\text{PERES}} = \min_{\{\mathbf{k}, \mathbf{m}\}} \left[\frac{2 \psi_{\text{norm}}^2}{2 \psi_{\text{norm}}^2 - n^N \left(|\psi_{\mathbf{k}}|^2 + |\psi_{\mathbf{m}}|^2 - \sqrt{(|\psi_{\mathbf{k}}|^2 - |\psi_{\mathbf{m}}|^2)^2 + 4 |\psi_{\tilde{\mathbf{k}}}|^2 |\psi_{\tilde{\mathbf{m}}}|^2} \right)} \right] \quad (6.20)$$

Über die Separabilität kann hier keine Aussage gemacht werden, da es analytisch nicht möglich ist, mit diesem ϵ_{PERES} weiterzuarbeiten. Das Ergebnis kann nur dem numerischen Vergleich mit ϵ_{Misch} dienen, das durch das später in dieser Arbeit vorgestellte Mischungsverfahren erzeugt wird.

7 Pakete

In diesem Kapitel sollen separable Zustände, so genannte *Pakete*, mit interessanten Eigenschaften vorgestellt werden. Diese werden im nächsten Kapitel verwendet, um verallgemeinerte WERNER-Zustände durch Mischung zu erzeugen.

7.1 Definition der Pakete

Durch die Mischung ausgewählter Eigenzustände eines Produktoperators (hier Mischung aller Zustände zum gleichen Eigenwert) können interessante quantenmechanische Zustände erzeugt werden. Die Eigenzustände $|\Lambda_{\mathbf{m}}^{\mathbf{c}}\rangle$ der Produktoperatoren sind Produktzustände (siehe Kapitel 4.3). Mischt man solche nichtverschränkten Zustände, erhält man wieder einen separablen Zustand (siehe Definition 8). Die Zustände, die durch Mischung aller Eigenzustände zum gleichen Eigenwert eines Produktoperators \mathbf{c} entstehen, werden hier als *Pakete* bezeichnet.

Definition 9: Pakete

Mischt man alle Eigenzustände $|\Lambda_{\mathbf{m}}^{\mathbf{c}}\rangle$ eines Produktoperators $\hat{C}_{\mathbf{c}}$ ($\mathbf{c} \neq 0$) zum gleichen Eigenwert $\Lambda_{\mathbf{m}}^{\mathbf{c}} = \omega^{-s}$ mit $s = 0 \dots n - 1$, mit gleicher Gewichtung, erhält man den Zustand

$$\hat{\rho}_{\text{Paket}}(\mathbf{c}, s) = \frac{1}{N_z} \sum_{\mathbf{m}} |\Lambda_{\mathbf{m}}^{\mathbf{c}}\rangle \langle \Lambda_{\mathbf{m}}^{\mathbf{c}}| \delta(\Lambda_{\mathbf{m}}^{\mathbf{c}} = \omega^{-s}).$$

Dieser Zustand wird als *Paket* bezeichnet.

$N_z = n^{N-1}$ ist die Anzahl der Eigenzustände des Produktoperators zum Eigenwert $\Lambda_{\mathbf{m}}^{\mathbf{c}} = \omega^{-s}$, d.h. der Entartungsgrad (siehe Gl. (4.16)). Die Summe läuft über alle Eigenzustände \mathbf{m} , wird jedoch durch die δ -Funktion auf Eigenzustände zum gleichen Eigenwert (bestimmt durch s) beschränkt. Die Annahme der Eigenwerte des Produktoperators als n -te Einheitswurzeln folgt aus Kapitel 4.3 ($-s$ wird hier nur aus Gründen der Darstellung verwendet).

Es ist zunächst sinnvoll, auch diesen Zustand nach Produktoperatoren zu entwickeln. Die direkte Berechnung des Korrelationstensorelements ist jedoch, wegen der komplizierten Eigenzustandsstruktur der Produktoperatoren, schwierig. Deshalb soll hier der umgekehrte Weg eingeschlagen werden: Angabe einer Produktoperatordarstellung und Vergleich dieser mit den hier definierten Paketen. Außerdem sollen hier nur Systeme

mit $n \in \mathbb{P}$ betrachtet werden, da bei diesen eine geschlossene Darstellung der Pakete in Produktoperatorentwicklung möglich ist, während es für den Fall $n \notin \mathbb{P}$ eine solche nicht gibt.

Theorem 6: Produktoperatorentwicklung der Pakete

Für $n \in \mathbb{P}$ haben die Pakete die Produktoperatorentwicklung:

$$\hat{\rho}_{\text{Paket}}(\mathbf{c}, s) = \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \sum_{\sigma=1}^{n-1} \omega^{s\sigma} \hat{C}_{\mathbf{c}}^{\sigma} \right).$$

Aus Gl. (4.11b) folgt, dass die Potenz eines Produktoperators proportional zu einem anderen Produktoperator ist. Wenn man also hier Gl. (4.11b) einsetzt, erhält man den Korrelationstensor und damit die herkömmliche Produktoperatorentwicklung. Die hier angegebene Form erweist sich für die weitere Rechnung allerdings als günstiger.

Beweis: Zu zeigen bleibt, dass Definition 9 und Theorem 6 übereinstimmen. Die Eigenwertgleichung des Produktoperators ist bekanntlich:

$$\hat{C}_{\mathbf{c}} |\Lambda_{\mathbf{m}}^{\mathbf{c}}\rangle = \Lambda_{\mathbf{m}}^{\mathbf{c}} |\Lambda_{\mathbf{m}}^{\mathbf{c}}\rangle. \quad (7.1)$$

Es gibt einen Operator \hat{Q}

$$\hat{Q} = [|\Lambda_1^{\mathbf{c}}\rangle, \dots, |\Lambda_{n^N}^{\mathbf{c}}\rangle], \quad (7.2)$$

der den Produktoperator diagonalisiert:

$$\hat{D}_{\mathbf{c}} = \hat{Q}^{-1} \hat{C}_{\mathbf{c}} \hat{Q} = \begin{pmatrix} \Lambda_1^{\mathbf{c}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Lambda_{n^N}^{\mathbf{c}} \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

Aus Theorem 6 sieht man sofort, dass auch das Paket durch \hat{Q} diagonalisiert wird, da für eine Produktoperatorpotenz gilt:

$$\begin{aligned} \hat{Q}^{-1} \hat{C}_{\mathbf{c}}^{\sigma} \hat{Q} &= \hat{Q}^{-1} \hat{C}_{\mathbf{c}} \dots \hat{C}_{\mathbf{c}} \hat{Q} \\ &= \hat{Q}^{-1} \hat{C}_{\mathbf{c}} \hat{Q} \dots \hat{Q}^{-1} \hat{C}_{\mathbf{c}} \hat{Q} \\ &= \hat{D}_{\mathbf{c}} \dots \hat{D}_{\mathbf{c}} = \hat{D}_{\mathbf{c}}^{\sigma}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Aus diesem Grund geht das Paket mittels \hat{Q} in Diagonalform über:

$$\begin{aligned} \hat{Q}^{-1} \hat{\rho}_{\text{Paket}}(\mathbf{c}, s) \hat{Q} &= \frac{1}{n^N} \hat{Q}^{-1} \left(\hat{1} + \sum_{\sigma=1}^{n-1} \omega^{s\sigma} \hat{C}_{\mathbf{c}}^{\sigma} \right) \hat{Q} \\ &= \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \sum_{\sigma=1}^{n-1} \omega^{s\sigma} \hat{Q}^{-1} \hat{C}_{\mathbf{c}}^{\sigma} \hat{Q} \right) \\ &= \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \sum_{\sigma=1}^{n-1} \omega^{s\sigma} \hat{D}_{\mathbf{c}}^{\sigma} \right). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Von dieser Gleichung können die Eigenwerte der Pakete direkt abgelesen werden:

$$\Omega(\mathbf{c}, \mathbf{m}, s) = \frac{1}{n^N} \left(1 + \sum_{\sigma=1}^{n-1} \omega^{s\sigma} (\Lambda_{\mathbf{m}}^{\mathbf{c}})^{\sigma} \right). \quad (7.6)$$

Da die Eigenwerte im Raum der n -ten Einheitswurzeln bleiben (siehe Kapitel 4.3), kann man o.B.d.A. annehmen, dass $\Lambda_{\mathbf{m}}^{\mathbf{c}} = \omega^{-t}$ gilt. Damit erhalten die Eigenwerte die Form:

$$\Omega(\mathbf{c}, \mathbf{m}, s) = \frac{1}{n^N} \left(\sum_{\sigma=0}^{n-1} \omega^{(s-t)\sigma} \right) = \frac{1}{n^N} \begin{cases} n & t = s \\ \sum_{\sigma=0}^{n-1} \omega^{(s-t)\sigma} = 0 & t \neq s \end{cases} \quad (7.7)$$

Hier müssen zwei Fälle unterschieden werden: Ist $t = s$, so ist das Ergebnis der Summe n , da der Summand eins ist. Sonst ist die Summe null, da $(s-t)$ eine ganze Zahl ungleich null ist und die Summe für $n \in \mathbb{P}$ immer über alle n -ten Einheitswurzeln läuft. Mit dem Entartungsgrad $N_z = n^{N-1}$ (siehe Gl. (4.16)) erhält man also die Eigenwerte:

$$\Omega(\mathbf{c}, \mathbf{m}, s) = \begin{cases} \frac{n}{n^N} = \frac{1}{N_z} & \Lambda_{\mathbf{m}}^{\mathbf{c}} = \omega^{-s} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.8)$$

Jeder Dichteoperator kann in seine Eigenbasis entwickelt werden, also auch die Pakete

$$\hat{\rho}_{\text{Paket}}(\mathbf{c}, s) = \sum_{\mathbf{m}} \Omega(\mathbf{c}, \mathbf{m}, s) |\Lambda_{\mathbf{m}}^{\mathbf{c}}\rangle \langle \Lambda_{\mathbf{m}}^{\mathbf{c}}|. \quad (7.9)$$

Setzt man den Eigenwert des Pakets ein, erhält man genau Definition 9. Damit ist gezeigt, dass Definition 9 und Theorem 6 übereinstimmen. \square

7.2 Eigenschaften der Pakete

Die Pakete $\hat{\rho}_{\text{Paket}}(\mathbf{c}, s)$ müssen echte Zustände sein, d.h. sie müssen die folgenden drei wichtigen Eigenschaften erfüllen:

1. **Spur:** $\text{Spur}\{\hat{\rho}_{\text{Paket}}(\mathbf{c}, s)\} = 1$

Beweis:

$$\text{Spur}\{\hat{\rho}_{\text{Paket}}(\mathbf{c}, s)\} = \frac{1}{n^N} \left(\underbrace{\text{Spur}\{\hat{1}\}}_{=n^N} + \sum_{\sigma=1}^{n-1} \omega^{s\sigma} \text{Spur}\{\hat{C}_{\mathbf{c}}^{\sigma}\} \right). \quad (7.10)$$

Zu untersuchen bleibt die Spur von Potenzen des Produktoperators $\mathbf{c} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, was mit Gl. (4.11b) möglich ist:

$$\text{Spur}\{\hat{C}_{\mathbf{c}}^{\sigma}\} = \text{Spur}\{\omega^{\frac{1}{2}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\sigma(\sigma-1)} \hat{C}_{\{\underline{\sigma\mathbf{a}, \sigma\mathbf{b}}\}}\} = 0. \quad (7.11)$$

Die letzte Gleichheit gilt, da alle Produktoperatoren spurlos sind. \square

2. **Hermitizität:** $\hat{\rho}_{\text{Paket}}(\mathbf{c}, s) = (\hat{\rho}_{\text{Paket}}(\mathbf{c}, s))^\dagger$

Beweis: Im Folgenden werden die für die Produktoperatoren in Kapitel 4 hergeleiteten Relationen verwendet. Es ist zunächst nötig, den adjungierten Dichteoperator des Pakets zu berechnen:

$$\begin{aligned}
(\hat{\rho}_{\text{Paket}}(\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}, s))^\dagger &= \frac{1}{n^N} \left(\hat{1}^\dagger + \sum_{\sigma=1}^{n-1} \omega^{-s\sigma} (\hat{C}_{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}}^\sigma)^\dagger \right) \\
&\stackrel{(4.11b)}{=} \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \sum_{\sigma=1}^{n-1} \omega^{-s\sigma} (\omega^{\frac{1}{2}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\sigma(\sigma-1)} \hat{C}_{\{\sigma\mathbf{a}, \sigma\mathbf{b}\}})^\dagger \right) \\
&\stackrel{(4.7)}{=} \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \sum_{\sigma=1}^{n-1} \omega^{-s\sigma} \omega^{-\frac{1}{2}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\sigma(\sigma-1)} \omega^{\sigma^2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} \hat{C}_{\{-\sigma\mathbf{a}, -\sigma\mathbf{b}\}} \right) \\
&= \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \sum_{\sigma=1}^{n-1} \omega^{-s\sigma} \omega^{\frac{1}{2}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\sigma(\sigma+1)} \hat{C}_{\{-\sigma\mathbf{a}, -\sigma\mathbf{b}\}} \right). \quad (7.12)
\end{aligned}$$

Dieser adjungierte Dichteoperator des Pakets muss nun mit dem Paket selbst verglichen werden:

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{\text{Paket}}(\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}, s) &= \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \sum_{\sigma'=1}^{n-1} \omega^{s\sigma'} \hat{C}_{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}}^{\sigma'} \right) \\
&= \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \sum_{\sigma'=1}^{n-1} \omega^{s\sigma'} \omega^{\frac{1}{2}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\sigma'(\sigma'-1)} \hat{C}_{\{\sigma'\mathbf{a}, \sigma'\mathbf{b}\}} \right). \quad (7.13)
\end{aligned}$$

Diese beiden Dichteoperatoren können nur übereinstimmen, wenn ein Produktoperator des adjungierten Pakets mit einem aus der Summe von Produktoperatoren des ursprünglichen Pakets übereinstimmt und zusätzlich die Koeffizienten der beiden Operatoren gleich sind. Für die Gleichheit der beiden Produktoperatoren muss gelten:

$$-\sigma\mathbf{a} = \sigma'\mathbf{a} \Rightarrow \underline{(\sigma + \sigma')\mathbf{a}} = \mathbf{0}, \quad (7.14a)$$

$$-\sigma\mathbf{b} = \sigma'\mathbf{b} \Rightarrow \underline{(\sigma + \sigma')\mathbf{b}} = \mathbf{0}. \quad (7.14b)$$

Da alle Größen positiv sind und alle Indizes a_μ und b_μ von $0 \dots n-1$ laufen, haben diese Gleichungen nur zwei Lösungen: entweder sind alle Indizes a_μ und b_μ null, was allerdings ausgeschlossen bleibt, da es nicht sinnvoll ist, ein Paket mit dem Einsoperator zu bilden, oder es muss gelten $(\sigma + \sigma') = n$. (Diese Überlegungen gelten nur für Fälle bei denen $n \in \mathbb{P}$ ist. Ist dies nicht der Fall, gibt es hier noch andere Lösungen.) Aus den Summen sind nun jeweils zwei gleiche Operatoren gefunden. Damit beide Dichteoperatoren übereinstimmen, müssen hier auch die

Koeffizienten übereinstimmen:

$$\begin{aligned}
\omega^{-s\sigma} \omega^{\frac{1}{2} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \sigma(\sigma+1)} &= \omega^{s\sigma'} \omega^{\frac{1}{2} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \sigma'(\sigma'-1)} \\
\omega^{-s(\sigma+\sigma')} \omega^{\frac{1}{2} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \sigma(\sigma+1)} \omega^{-\frac{1}{2} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \sigma'(\sigma'-1)} &= 1 \\
\omega^{-sn} \omega^{\frac{1}{2} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} (\sigma^2 + \sigma + \sigma'^2 + \sigma')} &= 1 \\
\omega^{-sn} \omega^{\frac{1}{2} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} (\sigma + \sigma')(\sigma - \sigma' + 1)} &= 1 \\
\omega^{-sn} \omega^{\frac{1}{2} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} n(\sigma - (n - \sigma) + 1)} &= 1 \\
\omega^{-sn} \omega^{\frac{1}{2} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} n(2\sigma - n + 1)} &= 1 \\
\omega^{-sn} \omega^{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} n \sigma} \omega^{-\frac{1}{2} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} n(n-1)} &= 1.
\end{aligned} \tag{7.15}$$

Bei den ersten beiden Faktoren sieht man sofort, dass beide auf Grund der Definition von ω eins sind. Der dritte Faktor ist auch eins, da $n \in \mathbb{P}$ gilt und somit $n - 1$ für $n > 2$ immer eine durch zwei teilbare Zahl ist. Damit sind auch die Koeffizienten gleich. Nur die Pakete mit $n = 2$ machen hier Schwierigkeiten. Diese können jedoch umgangen werden, indem man für solche Netzwerke statt der unitären Operatoren die PAULI-Operatoren verwendet, da diese sowohl hermitesch als auch unitär sind. Hiermit ist der Hermitizitätsbeweis erbracht. \square

3. Positivität: $\hat{\rho}_{\text{Paket}}(\mathbf{c}, s) \geq 0$

Die Eigenwerte der Pakete (Gl. (7.8)) sind alle positiv oder null, woraus direkt folgt, dass die Pakete positiv definit sind.

7.3 Separabilität der Pakete

Durch einen Induktionsbeweis soll noch gezeigt werden, dass die Pakete tatsächlich separabel sind. Die zugrundeliegende Idee stammt von A. PITTENGER aus [6].

Beweis:

Induktionsannahme:

Ein Paket für N Knoten mit der lokalen Hilbertraumdimension n

$$\hat{\rho}_{\text{Paket}}^{(N)}(\mathbf{c}, s) = \frac{1}{n^N} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \omega^{s\sigma} \hat{C}_{\mathbf{c}}^{\sigma} \tag{7.16}$$

ist separabel.

Induktionsanfang:

Sei $N = 1$: das Paket hat dann die Form:

$$\hat{\rho}_{\text{Paket}}^{(1)}(\mathbf{c}, s) = \frac{1}{n} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \omega^{s\sigma} \hat{U}_{\mathbf{c}}^{\sigma}. \tag{7.17}$$

Dieser Zustand ist per Definition separabel, da es ein Einteilchenzustand ist.

Induktionsschritt:

Der Zustand

$$\hat{\rho} := \frac{1}{n} \sum_{a=0}^{n-1} \hat{\rho}_{\text{Paket}}^{(N)}(\mathbf{c}, a) \otimes \hat{\rho}_{\text{Paket}}^{(1)}(c, -a + t) \quad (7.18)$$

ist separabel, da nach Induktionsannahme der erste Zustand und nach Induktionsanfang der zweite separabel ist, und der Zustand so erzeugt wird wie in Definition 8 angegeben. Im Folgenden wird gezeigt, dass gilt:

$$\hat{\rho} \stackrel{!}{=} \hat{\rho}_{\text{Paket}}^{(N+1)}(\{\mathbf{c}, c\}, t). \quad (7.19)$$

Zunächst werden dazu in die Definition von $\hat{\rho}$ die Pakete eingesetzt:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \frac{1}{n} \sum_{a=0}^{n-1} \frac{1}{n^N} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \omega^{a\sigma} \hat{C}_{\mathbf{c}}^{\sigma} \otimes \frac{1}{n} \sum_{\sigma'=0}^{n-1} \omega^{(-a+t)\sigma'} \hat{U}_{\mathbf{c}}^{\sigma'} \\ &= \frac{1}{n^{N+2}} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{\sigma'=0}^{n-1} \hat{C}_{\mathbf{c}}^{\sigma} \otimes \hat{U}_{\mathbf{c}}^{\sigma'} \omega^{t\sigma'} \sum_{a=0}^{n-1} \omega^{a(\sigma-\sigma')}. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Von Interesse ist die letzte Summe über a , da man sie mit Hilfe der Definition für ω berechnen kann:

$$\sum_{a=0}^{n-1} \omega^{a(\sigma-\sigma')} = \begin{cases} n & \sigma = \sigma' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = n \delta_{\sigma, \sigma'}, \quad (7.21)$$

damit gilt für $\hat{\rho}$

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \frac{1}{n^{N+1}} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \omega^{t\sigma} \hat{C}_{\mathbf{c}}^{\sigma} \otimes \hat{U}_{\mathbf{c}}^{\sigma} \\ &= \hat{\rho}_{\text{Paket}}^{(N+1)}(\{\mathbf{c}, c\}, t). \end{aligned} \quad (7.22)$$

Somit ist der Schluss von $N \rightarrow N + 1$ vollendet und der Induktionsbeweis erbracht. \square

8 Mischungsverfahren mit Paketen

In diesem Abschnitt soll demonstriert werden, wie mit Hilfe der Pakete ein verallgemeinerter WERNER-Zustand durch Mischung erzeugt werden kann. Dabei soll ein Zustand mit möglichst großem ϵ , d.h. möglichst nahe an der Separabilitätsgrenze, gemischt werden. Für den Spezialfall eines verallgemeinerten WERNER-Zustands mit lokaler Hilbertraumdimension $n \in \mathbb{P}$ kann man sogar das mit Hilfe des PERES-Kriteriums berechnete ϵ_{PERES} erreichen (siehe Kapitel 6.3). Da das Mischungsverfahren per Konstruktion ein *hinreichendes Separabilitätskriterium* darstellt, und es möglich ist, einen Zustand mit ϵ_{PERES} zu mischen, folgt hier, dass das PERES-Kriterium für WERNER-Zustände die Separabilitätsgrenze markiert.

Zunächst wird nun eine Mischung von ausgewählten Paketen erzeugt, die dann mit dem verallgemeinerten WERNER-Zustand verglichen wird.

8.1 Erzeugung verallgemeinerter WERNER-Zustands

8.1.1 Auswahl der Pakete

Die Pakete, die zur Mischung benötigt werden, können mittels des Korrelationstensors aufgefunden werden. Jeder Eintrag im Korrelationstensor entspricht einem Produktoperator mit den Indizes $\mathbf{c} \hat{=} \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$. Man muß zu jedem von null verschiedenen Element des Korrelationstensors ein Paket zur Verfügung stellen.

Der Korrelationstensor des WERNER-Zustands entspricht dem des Katzenzustands bis auf die Skalierung der Einträge (siehe Kapitel 5.2). Das Korrelationstensorelement ist dabei nur von null verschieden, wenn für die Indizes gilt:

$$\mathbf{a} = \{a, \dots, a\}, \quad \sum_{\mu=1}^N b_{\mu} = 0. \quad (8.1)$$

Also werden hier alle Pakete ausgewählt, deren Indexvektoren $\mathbf{c} \hat{=} \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ diese Forderungen erfüllen. Da alle von null verschiedenen Korrelationstensorelemente des Katzenzustands eins sind, kommt man außerdem mit Paketen zu $s = 0$ aus.

8.1.2 Anzahl der Pakete

Die Anzahl der im letzten Abschnitt ausgewählten Pakete lässt sich durch die Summation aller Korrelationstensorelemente der Katze (ohne das triviale Element $\{\mathbf{0}, \mathbf{0}\}$) berechnen.

Dies ist nur möglich, weil alle Elemente des Korrelationstensors des Katzenzustands entweder null oder eins sind, und man zu jedem Element genau ein Paket ausgewählt hat. Man kann auch über das triviale Element mitsummieren, muss dann allerdings vom Ergebnis wieder 1 abziehen:

$$\begin{aligned} N_p &= \sum_{\substack{\mathbf{c} \\ \mathbf{c} \neq \mathbf{0}}} u_{\mathbf{c}} \\ &= \sum_{a=0}^{n-1} \sum_{\mathbf{b}} 1 \delta(\underline{\sum_{\mu=1}^N b_{\mu}} = 0) - 1. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Die Summation über a kann direkt ausgeführt werden, und die δ -Funktion kann umgekehrt wie in Kapitel 5.2 wieder als Summe dargestellt werden; man erhält damit:

$$\begin{aligned} N_p &= n \sum_{\mathbf{b}} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{j(b_1 + \dots + b_N)} - 1 \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{b_1=0}^{n-1} \omega^{j b_1} \sum_{b_2=0}^{n-1} \omega^{j b_2} \dots \sum_{b_N=0}^{n-1} \omega^{j b_N} - 1. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Jede dieser Summen stellt für $j > 0$ eine geometrische Reihe dar. Summiert man diese für $j > 0$, erhält man:

$$N_p = \sum_{\mathbf{b}} \omega^0 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\omega^{n j} - 1}{\omega^j - 1} \dots \frac{\omega^{n j} - 1}{\omega^j - 1} - 1. \quad (8.4)$$

Da $\omega^{n j} = 1$ und $\omega^j \neq 1$ ist, ist jeder Term der zweiten Summe null. Die Summe über \mathbf{b} ergibt n^N , da der Summand eins ist. Damit ist die Anzahl der Pakete

$$N_p = n^N - 1. \quad (8.5)$$

8.1.3 Mischung der Pakete

Nun sollen alle in Kapitel 8.1.1 beschriebenen Pakete gemischt werden. Dabei sollen die beiden Bedingungen (Gl. (8.1)) berücksichtigt werden, indem für die verwendeten Pakete $\mathbf{a} = \{a, \dots, a\}$ angenommen wird, und die Summation über \mathbf{b} durch $\delta(\underline{\sum_{\mu=1}^N b_{\mu}} = 0)$ eingeschränkt wird. Außerdem soll in den folgenden Summen der Term $a = 0, \mathbf{b} = \mathbf{0}$ nicht mitgenommen werden. Die Mischung erfolgt mit gleicher Gewichtung, zur Normierung wird durch die Anzahl der gemischten Pakete N_p geteilt.

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\text{Misch}} &= \frac{1}{N_p} \sum_{a=0}^{n-1} \sum_{\mathbf{b}} \hat{\rho}_{\text{Paket}}(\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}, 0) \delta(\underline{\sum_{\mu=1}^N b_{\mu}} = 0) \\ &= \frac{1}{N_p} \sum_{a=0}^{n-1} \sum_{\mathbf{b}} \frac{1}{n^N} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \hat{C}_{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}}^{\sigma} \delta(\underline{\sum_{\mu=1}^N b_{\mu}} = 0) \\ &\stackrel{(4.11b)}{=} \frac{1}{N_p} \frac{1}{n^N} \sum_{a=0}^{n-1} \sum_{\mathbf{b}} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \omega^{\frac{1}{2} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \sigma (\sigma-1)} \hat{C}_{\{\underline{\sigma \mathbf{a}}, \underline{\sigma \mathbf{b}}\}} \delta(\underline{\sum_{\mu=1}^N b_{\mu}} = 0) \end{aligned} \quad (8.6)$$

Betrachtet man den Exponenten von ω , so erkennt man, dass das Skalarprodukt hier auf Grund der δ -Funktion immer ein Vielfaches von n ist:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{\mu=1}^N a_{\mu} b_{\mu} = a \sum_{\mu=1}^N b_{\mu} \sim n. \quad (8.7)$$

Da aber $\sigma(\sigma - 1)$ entweder null oder eine gerade Zahl ist, ist der Exponent von ω in Gl. (8.6) immer null oder ein ganzzahliges Vielfaches von n . Der Faktor ist also insgesamt gleich eins und man kann umformen:

$$\hat{\rho}_{\text{Misch}} = \frac{1}{N_p} \frac{1}{n^N} \sum_{a=0}^{n-1} \sum_{\mathbf{b}} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \hat{C}_{\{\sigma \mathbf{a}, \sigma \mathbf{b}\}} \delta(\sum_{\mu=1}^N b_{\mu} = 0). \quad (8.8)$$

Als nächstes muss die Summation über σ ausgewertet werden.

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\text{Misch}} = \frac{1}{N_p} \frac{1}{n^N} \sum_{a=0}^{n-1} \sum_{\mathbf{b}} \left(\hat{C}_{\{\mathbf{0}, \mathbf{0}\}} + \hat{C}_{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}} + \hat{C}_{\{2\mathbf{a}, 2\mathbf{b}\}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \hat{C}_{\{(n-1)\mathbf{a}, (n-1)\mathbf{b}\}} \right) \delta(\sum_{\mu=1}^N b_{\mu} = 0) \end{aligned} \quad (8.9)$$

Die Summen über den Operator $\hat{C}_{\{\mathbf{0}, \mathbf{0}\}} = \hat{1}^{(n^N)}$ lassen sich sofort auswerten: Man erhält die Anzahl der Pakete N_p multipliziert mit dem Einsoperator. Der zweite Term $\hat{C}_{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}}$ mit den Summen und der δ -Funktion stellt die Entwicklung des verallgemeinerten Katzenzustands nach Produktoperatoren dar. Es geht jetzt darum, alle weiteren Terme zu vereinfachen. Betrachtet man das Indexpaar $\{\eta \mathbf{a}, \eta \mathbf{b}\}$, so stellt man fest, dass auch dieses Paar die Bedingung Gl. (8.1) erfüllt. Daraus folgt, dass ein Produktoperator, dessen Indexvektoren mit einer ganzen Zahl multipliziert werden, wieder zur Menge der Operatoren gehört, die in der Produktoperatorentwicklung des Katzenzustands auftauchen. Hier wird außerdem über alle diese Operatoren summiert und solange $n \in \mathbb{P}$ ist, ändert sich durch Multiplikation der Indexvektoren mit einer ganzen Zahl nur die Reihenfolge des Auftretens der Operatoren. Das bedeutet, dass alle weiteren Terme in der Summe auch die Produktoperatorentwicklung des verallgemeinerten Katzenzustands darstellen. Da es insgesamt $n - 1$ solche Terme gibt, erhält man folgendes Ergebnis:

$$\hat{\rho}_{\text{Misch}} = \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \frac{n-1}{N_p} \sum_{a=0}^{n-1} \sum_{\mathbf{b}} \hat{C}_{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}} \delta(\sum_{\mu=1}^N b_{\mu} = 0) \right). \quad (8.10)$$

8.1.4 Berechnung von ϵ

Der gewünschte Zustand ist jetzt gemischt. Zusätzlich ist die Produktoperatorentwicklung des verallgemeinerten WERNER-Zustands (siehe Kapitel 5.3 Gl. (5.11)) bekannt:

$$\hat{\rho}_{\text{WERNER}} = \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \epsilon \sum_{\mathbf{c}} u_{\mathbf{c}} (\hat{\rho}_{\text{Katze}}) \hat{C}_{\mathbf{c}} \right). \quad (8.11)$$

Vergleicht man nun diese beiden Zustände $\hat{\rho}_{\text{Misch}}$ mit $\hat{\rho}_{\text{WERNER}}$ bezüglich ihrer Produktoperatorentwicklung, so ist es möglich, den Mischungskoeffizient ϵ zu berechnen. Man erhält:

$$\epsilon = \frac{n-1}{N_p} = \frac{n-1}{n^N-1}. \quad (8.12)$$

8.2 Zustandsmischung an der Separabilitätsgrenze

Betrachtet man den oben beschriebenen Mischungsvorgang, so fällt auf, dass jedes Paket schon $n-1$ richtige Korrelationen erzeugt. Trotzdem wird bisher diese besondere Eigenschaft der Pakete nicht ausgenutzt. In dem bisher vorgestellten Mischungsverfahren werden Pakete zu jedem Korrelationstensorelement mitgenommen. Mischt man stattdessen nur eine spezielle, geschickte Auswahl an Paketen, kann man eine Effizienzsteigerung erreichen. Als geschickt erweist es sich hier, nur Pakete zu $a=1$ mitzunehmen. Dem erzeugten Zustand fehlen noch Korrelationen, die aber durch eine weitere spezielle Mischung erzeugt und beigemischt werden können.

8.2.1 Pakete mit $a=1$

Zunächst allerdings werden alle Pakete mit $a=1$ gemischt, d.h. $\mathbf{a} = \{1, \dots, 1\}$. Dabei soll $N_{p(a=1)}$ die Zahl der ausgewählten Pakete zu $a=1$ sein:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{a=1} &= \frac{1}{N_{p(a=1)}} \sum_{\mathbf{b}} \hat{\rho}_{\text{Paket}}(\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}, 0) \delta(\sum_{\mu=1}^N b_{\mu} = 0) \\ &= \frac{1}{N_{p(a=1)}} \frac{1}{n^N} \sum_{\mathbf{b}} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \hat{C}_{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}}^{\sigma} \delta(\sum_{\mu=1}^N b_{\mu} = 0). \end{aligned} \quad (8.13)$$

Wie in Kapitel 8.1.3 kann hier die Produktoperatorpotenz umgeschrieben und die Dichtematrix damit vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{a=1} &= \frac{1}{N_{p(a=1)}} \frac{1}{n^N} \sum_{\mathbf{b}} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \hat{C}_{\{\sigma \mathbf{a}, \sigma \mathbf{b}\}} \delta(\sum_{\mu=1}^N b_{\mu} = 0) \\ &= \frac{1}{N_{p(a=1)}} \frac{1}{n^N} \sum_{\mathbf{b}} \left(\hat{C}_{\{\mathbf{0}, \mathbf{0}\}} + \hat{C}_{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}} + \hat{C}_{\{2\mathbf{a}, 2\mathbf{b}\}} + \dots \right) \delta(\sum_{\mu=1}^N b_{\mu} = 0). \end{aligned} \quad (8.14)$$

In jedem Produktoperator (bis auf den ersten) wird der Indexvektor \mathbf{b} mit einer ganzen Zahl multipliziert. Wie schon im vorigen Kapitel gezeigt, führt diese Multiplikation zu der gleichen Menge an Indexvektoren, und da über alle derartigen Indexvektoren \mathbf{b} summiert wird, kann man die Multiplikation von \mathbf{b} mit einer ganzen Zahl ohne Beschränkung der Allgemeinheit auch weglassen.

$$\hat{\rho}_{a=1} = \frac{1}{N_{p(a=1)}} \frac{1}{n^N} \sum_{\mathbf{b}} (\hat{C}_{\{\mathbf{0}, \mathbf{0}\}} + \hat{C}_{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}} + \hat{C}_{\{2\mathbf{a}, \mathbf{b}\}} + \dots) \delta(\sum_{\mu=1}^N b_{\mu} = 0) \quad (8.15)$$

Jetzt kann wieder eine Summation über $a = 1 \dots n - 1$ eingeführt werden. Die Summation über den Operator $\hat{C}_{\{\mathbf{0}, \mathbf{0}\}}$ kann ausgeführt werden.

$$\hat{\rho}_{a=1} = \frac{1}{N_{p(a=1)}} \frac{1}{n^N} \left(N_{p(a=1)} \hat{\mathbf{1}} + \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{\mathbf{b}} \hat{C}_{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}} \delta(\sum_{\mu=1}^N b_{\mu} = 0) \right) \quad (8.16)$$

Dieser Zustand hat schon viel Ähnlichkeit mit dem gesuchten verallgemeinerten WERNER-Zustand. Zu diesem fehlen nur noch sämtliche Produktoperatoren, die zu $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ gehören. Im folgenden Kapitel muss eine spezielle Mischung gefunden werden, die diese Eigenschaften enthält. Dann kann durch eine erneute Mischung der WERNER-Zustand erzeugt werden.

Zuvor bleibt noch die Bestimmung der Anzahl der Pakete $N_{p(a=1)}$. Zu jedem a gibt es gleich viele von null verschiedene Korrelationstensorelemente. Insgesamt gibt es $N_p + 1$ (N_p ist die Anzahl der Korrelationstensorelemente ohne das $\{\mathbf{0}, \mathbf{0}\}$ -Element). Die Anzahl der Elemente zu $a = 1$ entspricht dem n -ten Teil aller Elemente, woraus folgt:

$$N_{p(a=1)} = \frac{n^N}{n} = n^{N-1}. \quad (8.17)$$

8.2.2 Spezielle Mischung

Man benötigt jetzt noch einen Zustand, der die fehlenden Korrelationen zu $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ einbringt. Als günstig erweist sich hier der Zustand:

$$\hat{\rho}_{\text{spez}} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |i, \dots, i\rangle \langle i, \dots, i|, \quad (8.18)$$

der alle Eigenschaften eines echten quantenmechanischen Zustands besitzt. Die Matrix hat in der Produktbasis schon Diagonalgestalt, ist also hermitesch. Man sieht sofort, dass alle Eigenwerte null oder $\frac{1}{n}$ sind, und dass die Normierung stimmt. Außerdem stellt diese Dichtematrix eine Mischung aus Dichtematrizen von Produktzuständen dar, repräsentiert also einen separablen Zustand. Nun muss der Korrelationstensor dieses Zustands berechnet werden.

$$\begin{aligned} u_{\mathbf{c}}(\hat{\rho}_{\text{spez}}) &= \frac{1}{n} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{i=0}^{n-1} \langle \mathbf{k} | \hat{C}_{\mathbf{c}}^{\dagger} | i, \dots, i \rangle \langle i, \dots, i | \mathbf{k} \rangle \\ &\stackrel{(4.7)}{=} \frac{1}{n} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{i=0}^{n-1} \omega^{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} \omega^{-i(b_1 + \dots + b_N)} \delta_{k_1, i - a_1} \dots \delta_{k_N, i - a_N} \cdot \delta_{i, k_1} \dots \delta_{i, k_N} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \omega^{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} \omega^{-i(b_1 + \dots + b_N)} \delta_{i, i - a_1} \dots \delta_{i, i - a_N} \end{aligned} \quad (8.19)$$

Aus den δ -Funktionen folgt, dass alle a_{μ} null sein müssen, damit das Korrelationstensorelement überhaupt von null verschieden sein kann. Aus der Summe über i folgt analog

zu Kapitel 5.2 die δ -Funktion $n \delta(\sum_{\mu=1}^N b_{\mu} = 0)$. Damit hat dieser Zustand die Produktoperatorentwicklung:

$$\hat{\rho}_{\text{spez}} = \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \sum_{\mathbf{b}} \hat{C}_{\{\mathbf{0}, \mathbf{b}\}} \delta(\sum_{\mu=1}^N b_{\mu} = 0) \right). \quad (8.20)$$

Dieser Zustand $\hat{\rho}_{\text{spez}}$ enthält genau die in der Mischung $\hat{\rho}_{a=1}$ noch fehlenden Korrelationen.

8.2.3 Zustandsmischung

Nun muss die Mischung der in den letzten beiden Kapiteln entwickelten Zustände durchgeführt werden. Dazu muss allerdings eine Gewichtung der Zustände erfolgen, um den Korrelationen gleiche Werte zu geben.

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\text{Misch}} &= \frac{1}{N_{p(a=1)} + 1} (N_{p(a=1)} \hat{\rho}_{a=1} + \hat{\rho}_{\text{spez}}) \\ &= \frac{1}{N_{p(a=1)} + 1} \frac{1}{n^N} \left[N_{p(a=1)} \frac{1}{N_{p(a=1)}} \left(N_{p(a=1)} \hat{1} + \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{\mathbf{b}} \hat{C}_{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}} \delta(\sum_{\mu=1}^N b_{\mu} = 0) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\hat{1} + \sum_{\mathbf{b}} \hat{C}_{\{\mathbf{0}, \mathbf{b}\}} \delta(\sum_{\mu=1}^N b_{\mu} = 0) \right) \right] \\ &= \frac{1}{n^N} \left[\hat{1} + \frac{1}{N_{p(a=1)} + 1} \sum_{a=0}^{n-1} \sum_{\mathbf{b}} \hat{C}_{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}} \delta(\sum_{\mu=1}^N b_{\mu} = 0) \right] \end{aligned} \quad (8.21)$$

Der hier gemischte Zustand entspricht dem verallgemeinerten WERNER-Zustand in Produktoperatorentwicklung. Wie zuvor gezeigt, kann man wieder ϵ extrahieren zu:

$$\epsilon_{\text{opt}} = \frac{1}{N_{p(a=1)} + 1} = \frac{1}{n^{N-1} + 1}. \quad (8.22)$$

Der hier mit Hilfe separabler Pakete gemischte verallgemeinerte WERNER-Zustand ist in jedem Fall separabel. Deshalb kann das Mischungsverfahren als *hinreichendes Separabilitätskriterium* angesehen werden. Das durch die Mischung erreichte ϵ_{opt} entspricht dem aus dem PERES-Kriterium berechneten ϵ_{PERES} . Somit ist für die WERNER-Zustände ein notwendiges (PERES-Kriterium) und ein hinreichendes (Mischungsverfahren) Separabilitätskriterium berechnet und damit die Separabilitätsgrenze für diese Zustandsklasse bekannt. Für das hier vorgestellte Mischungsverfahren können zwei Aussagen getroffen werden:

1. Das Mischungsverfahren arbeitet optimal, da es Zustände direkt an der Separabilitätsgrenze erzeugt.
2. Das Mischungsverfahren ist ein scharfes Separabilitätskriterium für WERNER-Zustände.

Das PERES-Kriterium ist für diese spezielle Klasse an Zuständen notwendig und hinreichend zugleich, also vollkommen scharf. Nochmal sei hier darauf hingewiesen, dass alle diese Aussagen nur für $n \in \mathbb{P}$ gelten.

Die bisher vorgestellten Mischungsverfahren können auch ohne die Einführung von Paketen auf Basis der Eigenzustände von Produktoperatoren durchgeführt werden. Die Theorie ist dann auf Grund der Vielzahl an komplexen Zuständen, die berechnet und gemischt werden müssen, sehr viel komplizierter.

Ein Beispiel für eine Mischung von der in diesem Kapitel beschriebenen Art ist in Anhang C.1 gezeigt.

8.3 Grenzen des Verfahrens

Alle bisher betrachteten Mischungsverfahren sind beschränkt auf Netzwerke, deren Subsysteme $n \in \mathbb{P}$ Niveaus aufweisen. Diese Einschränkung hängt schon mit der Paketdefinition (siehe Theorem 6) zusammen. Deshalb sollen an dieser Stelle nochmals die Pakete für $n \notin \mathbb{P}$ betrachtet werden. Damit gibt es für n eine Zerlegung nach Definition 4:

$$n = \prod_{k=1}^{\xi} p_k^{\alpha_k} \quad (8.23)$$

mit den ξ Primfaktoren p_k von n und ihrer Vielfachheit α_k . Die Pakete nach Definition 6 haben die Form:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\text{Paket}}(\mathbf{c}, s) &= \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \sum_{\sigma=1}^{n-1} \omega^{s\sigma} \hat{C}_{\mathbf{c}}^{\sigma} \right) \\ &= \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \sum_{\sigma=1}^{n-1} \omega^{s\sigma} \omega^{\frac{1}{2} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \sigma(\sigma-1)} \hat{C}_{\{\sigma \mathbf{a}, \sigma \mathbf{b}\}} \right). \end{aligned} \quad (8.24)$$

Pakete, deren Indexvektoren $\mathbf{c} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bei Multiplikation mit einer ganzen Zahl $\sigma = 1, \dots, n-1$ und Anwendung der Modulo-Funktion beide in den Nullvektor übergehen:

$$\underline{\sigma \mathbf{a}} = \mathbf{0}, \quad \underline{\sigma \mathbf{b}} = \mathbf{0}, \quad (8.25)$$

sind nicht mehr normiert. Die Summe über σ durchläuft öfters die gleiche Sequenz von Operatoren, weshalb der Einsoperator zu häufig vorkommt. Dieses Problem tritt nur auf bei Paketen, deren Index-Tupel $\{a_\nu, b_\nu\}$ sämtlich eine der folgenden Relationen erfüllen:

$$a_\nu = p_k^\tau, \quad b_\nu = p_k^\tau \quad \text{oder} \quad (8.26a)$$

$$a_\nu = 0, \quad b_\nu = p_k^\tau \quad \text{oder} \quad (8.26b)$$

$$a_\nu = p_k^\tau, \quad b_\nu = 0 \quad \text{oder} \quad (8.26c)$$

$$a_\nu = 0, \quad b_\nu = 0 \quad (8.26d)$$

mit $\tau = 1, \dots, \alpha_k$ (vgl. Gl. (8.23)). Wird ein solches Paket, dessen Indexvektoren die Forderungen erfüllen betrachtet, so wird

$$\sigma = \frac{n}{p_k^\tau} \quad (8.27)$$

Gl. (8.25) erfüllen. Also muss die Summe in der Produktoperatorentwicklung dieses Pakets schon bei $\sigma = \frac{n}{p_k^\tau} - 1$ abgebrochen werden. Das Paket hat dann die Produktoperatorentwicklung:

$$\hat{\rho}_{\text{Paket}}(\mathbf{c}, s) = \frac{1}{n^N} \left(\hat{\mathbf{1}} + \sum_{\sigma=1}^{\frac{n}{p_k^\tau}-1} \omega^{s\sigma} \hat{C}_{\mathbf{c}}^\sigma \right). \quad (8.28)$$

Damit existiert eine Produktoperatorentwicklung für alle Pakete. Eine einheitliche Darstellung ist hier allerdings nicht mehr möglich.

Zunächst kann jetzt das optimale Mischungsverfahren durchgeführt werden. Es sollen alle Pakete mit $a = 1$ analog zu Kapitel 8.2.1 gemischt werden. Die dabei verwendeten Pakete sind nicht von dem oben beschriebenen Typ, da für $\mathbf{a} = \{1, \dots, 1\}$ keine der geforderten Bedingungen Gl. (8.26a)-(8.26d) gelten.

Mischt man alle für den WERNER-Zustand nötigen Pakete, erhält man zunächst:

$$\hat{\rho}_{a=1} = \frac{1}{N_{p(a=1)}} \frac{1}{n^N} \sum_{\mathbf{b}} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \hat{C}_{\{\sigma\mathbf{a}, \sigma\mathbf{b}\}} \delta(\sum_{\mu=1}^N b_\mu = 0). \quad (8.29)$$

Die hier auftretende Summe von Produktoperatoren über σ birgt das gleiche Problem wie die oben beschriebenen Pakete. Es gibt Terme, für die Gl. (8.25) erfüllt ist. Das hat zur Folge, dass manche benötigten Produktoperatoren in der Summe noch überhaupt nicht enthalten sind, dafür andere überdurchschnittlich oft auftreten. Mit Hilfe spezieller Pakete ist es möglich, die fehlenden Korrelationen einzubringen und überschüssige zu beseitigen. Auf diesen Korrekturalgorithmus wird hier aus zwei Gründen nicht näher eingegangen: Erstens ist der Korrekturalgorithmus im Allgemeinen sehr kompliziert. Zweitens wird das erzielte ϵ durch Korrekturpakete unweigerlich schlechter. Es ist also nicht möglich, mit diesem Verfahren einen WERNER-Zustand direkt an der Separabilitätsgrenze zu mischen. Der im nächsten Kapitel vorgestellte Algorithmus ist fähig, sämtliche „blassen“ Zustände mit suboptimalem ϵ zu mischen, also auch alle WERNER-Zustände, sodass sich die Entwicklung eines Korrekturalgorithmus nicht lohnt. Dennoch ist in Anhang C.2 gezeigt, wie eine Mischung mit Korrekturpaketen aussehen könnte.

9 Module

In den letzten beiden Kapiteln wurden Pakete mit besonderen Eigenschaften eingeführt, mit deren Hilfe es möglich ist, verallgemeinerte WERNER-Zustände zu mischen. Mit einigen speziellen Tricks ist es sogar möglich, Zustände direkt an der Separabilitätsgrenze herzustellen. Es treten allerdings Schwierigkeiten auf beim Versuch, WERNER-Zustände eines Netzwerks mit lokaler Hilbertraumdimension $n \notin \mathbb{P}$ zu mischen. Wegen der auftretenden zusätzlichen Entartung im Spektrum der Produktoperatoren gibt es immer Korrelationen, die überdurchschnittlich oft in den Paketen auftreten, was zu einem Ungleichgewicht der Einträge im Korrelationstensor führt.

In diesem Kapitel sollen nun die Pakete auf eine minimale Anzahl an Korrelationen reduziert werden. Ziel dabei ist, die Pakete universeller einsetzbar zu machen. Es soll jeder „blasse“ Zustand jedes beliebigen Systems erzeugt werden können. Allerdings geht durch die Verallgemeinerung die Optimalität verloren.

Zunächst sollen jetzt die reduzierten Pakete, im weiteren Verlauf als *Module* bezeichnet, definiert werden. Danach soll in einem zweiten Schritt gezeigt werden, wie diese aus den Paketen hergestellt werden können.

9.1 Definition der Module

Die Pakete in der bisher verwendeten Form haben in ihrer Produktoperatorentwicklung immer $n - 1$ von null verschiedene Einträge im Korrelationstensor (siehe Theorem 6). Dies ist für die Mischung komplizierterer Zustände von Nachteil, da sich die Pakete durch ungeschickte Überlagerung ihrer Korrelationstensorelemente gegenseitig stören. Man sollte also die von null verschiedenen Korrelationstensorelemente auf eine minimale Anzahl beschränken. Solche Zustände mit einer minimalen Anzahl an von null verschiedenen Korrelationstensorelementen sollen im Folgenden als *Module* bezeichnet werden. Auch die Module sollen quantenmechanische Zustände sein, also die drei Forderungen für Dichtematrizen (Kapitel 2.1.3) erfüllen. Aus der Hermitizität folgt unmittelbar, dass mindestens zwei Korrelationstensorelemente von null verschieden sein müssen und zwar das zum Produktoperator \hat{C}_c und das zum adjungierten Operator \hat{C}_c^\dagger . Für den Fall $n = 3$ erfüllen die Pakete diese Minimalforderung. Nur für den Fall $n = 2$ kommt man mit nur einem einzigen Produktoperator aus, da die hier verwendeten PAULI-Operatoren gleichzeitig unitär und hermitesch sind. Interessant sind deshalb hier zunächst alle Fälle $n \geq 3$.

Die Module können durch ihre Produktoperatorentwicklung definiert werden.

Definition 10: Module

In einem Netzwerk, bestehend aus N Subsystemen mit jeweils n Niveaus, sei ein Modul zum Produktoperator $\hat{C}_{\mathbf{c}}$ und einer beliebigen Phase ϕ definiert durch:

$$\hat{\rho}_{\text{Modul}}(\mathbf{c}, \phi) = \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \Xi \left(e^{i\phi} \hat{C}_{\mathbf{c}} + e^{-i\phi} \hat{C}_{\mathbf{c}}^\dagger \right) \right)$$

mit einer reellen Konstante Ξ .

Diese speziellen Dichteoperatoren erfüllen offensichtlich die Minimalanforderung von nur zwei von null verschiedenen Elementen im Korrelationstensor.

9.2 Eigenschaften der Module

1. **Spur:** $\text{Spur}\{\hat{\rho}_{\text{Modul}}(\mathbf{c}, \phi)\} = 1$

Beweis: Durch Einsetzen der Definition der Module folgt:

$$\text{Spur}\{\hat{\rho}_{\text{Modul}}(\mathbf{c}, \phi)\} = \frac{1}{n^N} \left(\text{Spur}\{\hat{1}\} + \Xi \left(e^{i\phi} \text{Spur}\{\hat{C}_{\mathbf{c}}\} + e^{-i\phi} \text{Spur}\{\hat{C}_{\mathbf{c}}^\dagger\} \right) \right).$$

Aus der Spurlosigkeit der Produktoperatoren folgt, dass die Spur des Moduls eins ist. □

2. **Hermitizität:** $\hat{\rho}_{\text{Modul}}(\mathbf{c}, \phi) \stackrel{!}{=} \hat{\rho}_{\text{Modul}}(\mathbf{c}, \phi)^\dagger$

Beweis: Man berechnet den adjungierten Dichteoperator:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\text{Modul}}(\mathbf{c}, \phi)^\dagger &= \left[\frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \Xi \left(e^{i\phi} \hat{C}_{\mathbf{c}} + e^{-i\phi} \hat{C}_{\mathbf{c}}^\dagger \right) \right) \right]^\dagger \\ &= \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \Xi^* \left(e^{-i\phi} \hat{C}_{\mathbf{c}}^\dagger + e^{i\phi} \hat{C}_{\mathbf{c}} \right) \right). \end{aligned} \quad (9.1)$$

Da Ξ reell ist, entspricht dies dem Dichteoperator $\hat{\rho}_{\text{Modul}}(\mathbf{c}, \phi)$. Damit ist die Hermitizität gezeigt. □

3. **Positivität:** $\hat{\rho}_{\text{Modul}}(\mathbf{c}, \phi) \geq 0$, wenn $\Xi \leq \frac{1}{2}$

Beweis: Man kann den adjungierten Produktoperator in der Definition der Module durch eine Potenz des Produktoperators:

$$\hat{C}_{\mathbf{c}}^{n-1} \stackrel{(4.11b)}{=} \omega^{\frac{1}{2} \mathbf{a} \mathbf{b} n(n-1)} \hat{C}_{\mathbf{c}}^{-1} = \omega^{\frac{1}{2} \mathbf{a} \mathbf{b} n(n-1)} \hat{C}_{\mathbf{c}}^\dagger \quad (9.2)$$

ersetzen. Der Kommutator zwischen \hat{C}_c und \hat{C}_c^\dagger hat damit die folgende Form:

$$[\hat{C}_c, \hat{C}_c^\dagger] = [\hat{C}_c, \omega^{-\frac{1}{2}} \mathbf{a} \mathbf{b} n(n-1) \hat{C}_c^{n-1}] = \omega^{-\frac{1}{2}} \mathbf{a} \mathbf{b} n(n-1) [\hat{C}_c, \hat{C}_c^{n-1}] = 0. \quad (9.3)$$

Hieraus folgt: Da \hat{C}_c und \hat{C}_c^\dagger vertauschen, haben sie ein simultanes System von Eigenzuständen, sind also simultan diagonalisierbar, außerdem hat \hat{C}_c^\dagger die gleichen Eigenwerte wie \hat{C}_c , allerdings komplex konjugiert (folgt aus [26] S.330 Satz 6.6). Die Eigenwertgleichung für den Produktoperator hat die Form:

$$\hat{C}_c |\Lambda_m^c\rangle = \Lambda_m^c |\Lambda_m^c\rangle, \quad (9.4)$$

d.h. es existiert ein Operator \hat{Q} , der den Produktoperator diagonalisiert

$$\hat{Q}^{-1} \hat{C}_c \hat{Q} = \hat{D}_c, \quad (9.5)$$

siehe dazu auch Gl. (7.1)ff. Auch der adjungierte Operator \hat{C}_c^\dagger lässt sich mit Hilfe von Q diagonalisieren. Betrachtet man das Modul, so folgt:

$$\begin{aligned} \hat{Q}^{-1} \hat{\rho}_{\text{Modul}}(\mathbf{c}, \phi) \hat{Q} &= \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \Xi \left(e^{i\phi} \hat{Q}^{-1} \hat{C}_c \hat{Q} + e^{-i\phi} \hat{Q}^{-1} \hat{C}_c^\dagger \hat{Q} \right) \right) \\ &= \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \Xi \left(e^{i\phi} \hat{D}_c + e^{-i\phi} \hat{D}_c^\dagger \right) \right). \end{aligned} \quad (9.6)$$

Die Eigenwerte der Produktoperatoren sind komplexe Zahlen vom Betrag eins (siehe Gl. (4.15a)), d.h. man kann hier alle auftretenden Phasen in einer Phase $\vartheta(\mathbf{m}, \mathbf{c}, \phi)$ zusammenfassen und erhält für die Eigenwerte des Moduls:

$$\begin{aligned} \Omega(\mathbf{m}, \mathbf{c}, \phi) &= \frac{1}{n^N} \left(1 + \Xi \left(e^{i\vartheta(\mathbf{m}, \mathbf{c}, \phi)} + e^{-i\vartheta(\mathbf{m}, \mathbf{c}, \phi)} \right) \right) \\ &= \frac{1}{n^N} \left(1 + 2 \Xi \cos\{\vartheta(\mathbf{m}, \mathbf{c}, \phi)\} \right). \end{aligned} \quad (9.7)$$

Diese Eigenwerte sind unabhängig von der Phase $\vartheta(\mathbf{m}, \mathbf{c}, \phi)$ immer größer oder gleich null, wenn $\Xi \leq \frac{1}{2}$. Natürlich kann es bei günstigen Phasen auch größere Ξ geben, diese gelten dann aber nicht für alle Module dieser Systemgröße. \square

9.3 Separabilität der Module

Der Separabilitätsbeweis folgt, wie schon bei den Paketen, der Idee von A. PITTENGER (siehe Kapitel 7.3).

Beweis:

Induktionsannahme:

Ein Modul für ein System mit N Knoten und einer lokalen Hilbertraumdimension n :

$$\hat{\rho}_{\text{Modul}}^{(N)}(\mathbf{c}, \phi + \frac{2\pi}{n}s) = \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \frac{1}{2} \left(e^{i\phi} \omega^s \hat{C}_{\mathbf{c}} + e^{-i\phi} \omega^{-s} \hat{C}_{\mathbf{c}}^\dagger \right) \right) \quad (9.8)$$

ist separabel.

Induktionsanfang:

Zunächst sei $N = 1$; dann hat das Modul die Form:

$$\hat{\rho}_{\text{Modul}}^{(1)}(\mathbf{c}, \phi + \frac{2\pi}{n}s) = \frac{1}{n} \left(\hat{1}^{(1)} + \frac{1}{2} \left(e^{i\phi} \omega^s \hat{U}_{\mathbf{c}} + e^{-i\phi} \omega^{-s} \hat{U}_{\mathbf{c}}^\dagger \right) \right). \quad (9.9)$$

Dieser Zustand ist per Definition separabel, da es ein Einsubsystemzustand ist.

Induktionsschritt:

Der Zustand

$$\hat{\rho} := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{\rho}_{\text{Modul}}^{(N)}(\mathbf{c}, \phi + \frac{2\pi}{n}k) \otimes \hat{\rho}_{\text{Modul}}^{(1)}(\mathbf{c}, \phi + \frac{2\pi}{n}(-k+t)) \quad (9.10)$$

ist per Definition ein separabler Zustand, da nach Induktionsvoraussetzung der erste Zustand und nach Induktionsanfang der zweite Zustand separabel ist und der Zustand insgesamt gebildet wird wie in Definition 8 angegeben. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass gilt:

$$\hat{\rho} \stackrel{!}{=} \hat{\rho}_{\text{Modul}}^{(N+1)}(\{\mathbf{c}, \mathbf{c}\}, 2\phi, t). \quad (9.11)$$

Zunächst werden dazu in die Definitionen von $\hat{\rho}$ die Module eingesetzt:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^N} \left(\hat{1}^{(N)} + \frac{1}{2} \left(e^{i\phi} \omega^k \hat{C}_{\mathbf{c}} + e^{-i\phi} \omega^{-k} \hat{C}_{\mathbf{c}}^\dagger \right) \right) \otimes \\ &\quad \otimes \frac{1}{n} \left(\hat{1}^{(1)} + \frac{1}{2} \left(e^{i\phi} \omega^{-k+t} \hat{U}_{\mathbf{c}} + e^{-i\phi} \omega^{k-t} \hat{U}_{\mathbf{c}}^\dagger \right) \right) \\ &= \frac{1}{n^{N+2}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\hat{1}^{(N+1)} + \frac{1}{2} e^{i\phi} \omega^{-k+t} \hat{1}^{(N)} \otimes \hat{U}_{\mathbf{c}} + \frac{1}{2} e^{-i\phi} \omega^{k-t} \hat{1}^{(N)} \otimes \hat{U}_{\mathbf{c}}^\dagger \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{i\phi} \omega^k \hat{C}_{\mathbf{c}} \otimes \hat{1}^{(1)} + \frac{1}{2} e^{-i\phi} \omega^{-k} \hat{C}_{\mathbf{c}}^\dagger \otimes \hat{1}^{(1)} \\ &\quad + \frac{1}{4} \omega^{2k-t} \hat{C}_{\mathbf{c}} \otimes \hat{U}_{\mathbf{c}}^\dagger + \frac{1}{4} \omega^{-2k+t} \hat{C}_{\mathbf{c}}^\dagger \otimes \hat{U}_{\mathbf{c}} \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} e^{i2\phi} \omega^t \hat{C}_{\mathbf{c}} \otimes \hat{U}_{\mathbf{c}} + \frac{1}{4} e^{-i2\phi} \omega^{-t} \hat{C}_{\mathbf{c}}^\dagger \otimes \hat{U}_{\mathbf{c}}^\dagger \right). \quad (9.12) \end{aligned}$$

Jeder Term dieser Gleichung enthält bis auf die letzten beiden eine Summe über ω^k oder ω^{2k} . Wie schon des Öfteren gezeigt, sind alle diese Summen null. Übrig bleiben nur die letzten beiden Terme:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{n^{N+2}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\hat{1}^{(N+1)} + \frac{1}{4} e^{i2\phi} \omega^t \hat{C}_c \otimes \hat{U}_c + \frac{1}{4} e^{-i2\phi} \omega^{-t} \hat{C}_c^\dagger \otimes \hat{U}_c^\dagger \right). \quad (9.13)$$

Man kann direkt summieren, da der Summand nicht mehr von k abhängt und erhält einen Faktor n und schließlich das Modul:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \frac{1}{n^{N+1}} \left(\hat{1}^{(N+1)} \frac{1}{4} e^{i2\phi} \omega^t \hat{C}_c \otimes \hat{U}_c + \frac{1}{4} e^{-i2\phi} \omega^{-t} \hat{C}_c^\dagger \otimes \hat{U}_c^\dagger \right) \\ &= \hat{\rho}_{\text{Modul}}^{(N+1)}(\{\mathbf{c}, c\}, 2\phi, t). \end{aligned} \quad (9.14)$$

Zu beachten ist noch, dass sich der Vorfaktor Ξ geändert hat. Er ist nicht mehr wie vorher $\frac{1}{2}$, sondern nur noch $\frac{1}{4}$. Die Positivität fordert allerdings nur $\Xi \leq \frac{1}{2}$, was hier erfüllt ist. Damit ist der Schritt von $N \rightarrow N+1$ vollzogen und die Separabilität der Module gezeigt. \square

9.4 Erzeugung der Module aus den Paketen

9.4.1 Grundlegende Module

Die Module sollen nun durch Mischung der im Kapitel 7 definierten Pakete erzeugt werden. Da die Pakete in der dort verwendeten Form nur für $n \in \mathbb{P}$ definiert sind, gilt auch die folgende Rechnung nur für diesen Fall. Für den Fall $n \notin \mathbb{P}$ können, wie schon in Kapitel 8.3 angesprochen, ebenfalls Pakete definiert werden. Mit diesen können auch Module erzeugt werden. Dieser Fall soll hier jedoch nicht betrachtet werden. Das Ziel ist zu zeigen, dass die Module prinzipiell aus den Paketen und deshalb aus Produktzuständen gemischt werden können.

Für den Fall $n = 3$ entsprechen die Pakete den Modulen (bis auf die allgemeine Phase ϕ). Deshalb beschränken wir uns zunächst auf Systeme mit $n > 3$. Im zweiten Schritt, wenn es um die Erzeugung der allgemeinen Phase geht, können dann die Pakete für den Fall $n = 3$ verwendet werden, um auch für diese eine Phasenmischung durchzuführen.

Zunächst werden Pakete (siehe Theorem 6) gemischt mit gleichen \mathbf{c} aber unterschiedlichen Phasenfaktoren ($s = 0, \dots, n-1$). Der dazu nötige Mischungsvorgang von \mathcal{N} Paketen soll im Folgenden dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\text{Modul}}(\mathbf{c}, k) &= \frac{1}{\mathcal{N}} \left(\sum_{\eta=1}^{\frac{n-1}{2}-1} \left(r(\eta) \hat{\rho}_{\text{Paket}}(\mathbf{c}, \eta + k) + r(n - \eta) \hat{\rho}_{\text{Paket}}(\mathbf{c}, n - \eta + k) \right) \right. \\ &\quad \left. + \hat{\rho}_{\text{Paket}}(\mathbf{c}, k) \right) \end{aligned} \quad (9.15)$$

mit den Mischungskoeffizienten $r(\eta)$ und $r(n - \eta)$, die sämtlich positiv und reell sind. Mit einigen Umformungen erhält man hieraus:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\text{Modul}}(\mathbf{c}, k) &= \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{1}{n^N} \left[\sum_{\eta=1}^{\frac{n-1}{2}-1} \left(r(\eta) \hat{1} + \sum_{\sigma=1}^{n-1} r(\eta) \omega^{\sigma(\eta+k)} \hat{C}_{\mathbf{c}}^{\sigma} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. r(n - \eta) \hat{1} + \sum_{\sigma=1}^{n-1} r(n - \eta) \omega^{\sigma(n-\eta+k)} \hat{C}_{\mathbf{c}}^{\sigma} \right) + \hat{1} + \sum_{\sigma=1}^{n-1} \omega^{\sigma k} \hat{C}_{\mathbf{c}}^{\sigma} \right] \\ &= \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{1}{n^N} \left[\left(1 + \sum_{\eta=1}^{\frac{n-1}{2}-1} (r(\eta) + r(n - \eta)) \right) \hat{1} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\sigma=1}^{n-1} \left(1 + \sum_{\eta=1}^{\frac{n-1}{2}-1} \omega^{\sigma \eta} r(\eta) + \sum_{\eta=1}^{\frac{n-1}{2}-1} \omega^{\sigma(-\eta)} r(n - \eta) \right) \omega^{\sigma k} \hat{C}_{\mathbf{c}}^{\sigma} \right]. \quad (9.16) \end{aligned}$$

Aus Gründen der Normierung muss gelten:

$$\mathcal{N} = 1 + \sum_{\eta=1}^{\frac{n-1}{2}-1} (r(\eta) + r(n - \eta)). \quad (9.17)$$

In der Mischung gibt es $\frac{n-3}{2}$ freie Parameter $r(\eta)$ und ebenso viele $r(n - \eta)$, insgesamt also $n - 3$ freie Parameter. D.h. es ist möglich, durch geschickte Wahl dieser Parameter $n - 3$ Produktoperatoren aus den Paketen zu eliminieren. Günstig wäre es, die Operatoren $\hat{C}_{\mathbf{c}}$ und $\hat{C}_{\mathbf{c}}^{n-1}$ zu behalten, diese sind nämlich bis auf Faktoren adjungiert. Man kann die Vorfaktoren der Operatoren mit $\sigma = 2, \dots, n - 2$ durch die richtige Wahl der Mischungskoeffizienten zu null machen. Dazu ist folgendes lineare Gleichungssystem (LGS) zu lösen:

$$\left(1 + \sum_{\eta=1}^{\frac{n-1}{2}-1} \omega^{\sigma \eta} r(\eta) + \sum_{\eta=1}^{\frac{n-1}{2}-1} \omega^{-\sigma \eta} r(n - \eta) \right) = 0 \quad \text{mit } \sigma = 2, \dots, n - 2. \quad (9.18)$$

Dieses LGS hat $n - 3$ komplexe Gleichungen. Da die Mischungskoeffizienten reell sein sollen, betrachtet man zunächst den Imaginärteil der Gleichungen. Es muss gelten:

$$\begin{aligned} \Im \left(\sum_{\eta=1}^{\frac{n-1}{2}-1} \omega^{\sigma \eta} r(\eta) + \sum_{\eta=1}^{\frac{n-1}{2}-1} \omega^{-\sigma \eta} r(n - \eta) \right) &= 0 \\ \sum_{\eta=1}^{\frac{n-1}{2}-1} \Im(\omega^{\sigma \eta}) r(\eta) + \sum_{\eta=1}^{\frac{n-1}{2}-1} \underbrace{\Im(\omega^{-\sigma \eta})}_{=-\Im(\omega^{\sigma \eta})} r(n - \eta) &= 0 \\ \sum_{\eta=1}^{\frac{n-1}{2}-1} \Im(\omega^{\sigma \eta}) (r(\eta) - r(n - \eta)) &= 0. \quad (9.19) \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist erfüllt, wenn für die Mischungskoeffizienten gilt:

$$r(\eta) = r(n - \eta). \quad (9.20)$$

Setzt man dies in Gl. (9.18) ein, erhält man ein neues LGS mit reellen Koeffizienten:

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{\eta=1}^{\frac{n-1}{2}-1} (\omega^{\sigma\eta} + \omega^{-\sigma\eta})r(\eta) &= 0 \\ 1 + 2 \sum_{\eta=1}^{\frac{n-1}{2}-1} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\sigma\eta\right)r(\eta) &= 0. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Wieder sind dies $n - 3$ Gleichungen, da $\sigma = 2, \dots, n - 2$ ist, allerdings nur noch für $\frac{n-3}{2}$ Mischungskoeffizienten. Bei genauer Betrachtung der Gleichungen erkennt man, dass immer zwei Gleichungen wegen der Symmetrie des Kosinus identisch sind, nämlich z.B. die für $\sigma = 2$ und für $\sigma = n - 2$. Aus diesem LGS können also alle Mischungskoeffizienten berechnet werden.

Ist das LGS gelöst, sind alle Koeffizienten der Produktoperatoren in der Mischung null bis auf die von $\hat{C}_{\mathbf{c}}$ und $\hat{C}_{\mathbf{c}}^{n-1}$. Damit und mit der Relation 9.20 erhält man:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\text{Modul}}(\mathbf{c}, k) = \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{1}{n^N} \left[\mathcal{N} \hat{1} + \left(1 + \sum_{\eta=1}^{\frac{n-1}{2}-1} (\omega^{\eta} + \omega^{-\eta})r(\eta) \right) \omega^k \hat{C}_{\mathbf{c}} \right. \\ \left. + \left(1 + \sum_{\eta=1}^{\frac{n-1}{2}-1} (\omega^{-\eta} + \omega^{\eta})r(\eta) \right) \omega^{k(n-1)} \hat{C}_{\mathbf{c}}^{n-1} \right]. \end{aligned} \quad (9.22)$$

Hier können wir die reelle Zahl

$$\Xi = \frac{1 + 2 \sum_{\eta=1}^{\frac{n-3}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\eta\right)r(\eta)}{\mathcal{N}} \quad (9.23)$$

definieren, die völlig unabhängig vom Modulindexvektor \mathbf{c} ist. Ξ ist hier also eine universelle Konstante, die nur von Größe und Art des Systems abhängt und durch Lösen des LGS berechnet werden kann. Mit dieser Konstante erhalten wir schließlich eine Gleichung für das Modul:

$$\hat{\rho}_{\text{Modul}}(\mathbf{c}, k) = \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \Xi \left(\omega^k \hat{C}_{\mathbf{c}} + \omega^{k(n-1)} \hat{C}_{\mathbf{c}}^{n-1} \right) \right). \quad (9.24)$$

Diese Gleichung stimmt noch nicht vollständig mit dem oben definierten Modul überein. Zunächst muss hier die Operatorpotenz durch die Relation 9.2 in den adjungierten Operator überführt werden. Dann erhält man den folgenden Zustand:

$$\hat{\rho}_{\text{Modul}}(\mathbf{c}, k) = \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \Xi \left(\omega^k \hat{C}_{\mathbf{c}} + \omega^{k(n-1)} \omega^{\frac{1}{2}n(n-1) \mathbf{a} \mathbf{b}} \hat{C}_{\mathbf{c}}^{\dagger} \right) \right). \quad (9.25)$$

Die hier vor dem adjungierten Operator zusätzlich auftretende Phase lässt sich umformen:

$$\omega^{\frac{1}{2}n(n-1)\mathbf{ab}} = e^{i\pi(n-1)\mathbf{ab}} = (-1)^{(n-1)\mathbf{ab}}, \quad (9.26)$$

d.h. für alle ungeraden n , also auch für alle Primzahlen, ist die Phase immer eins. Wenn n gerade ist, kann es Operatoren geben, die an dieser Stelle eine zusätzliche Phase von -1 erhalten. Allerdings ist hier $n \in \mathbb{P}$ gefordert. Tatsache ist, dass mit dieser Methode die Module erzeugt werden können.

9.4.2 Beliebige Phase

Den bisher gemischten Modulen fehlt bis jetzt noch die beliebige Phase. Deshalb muss hier eine weitere Verallgemeinerung vorgenommen werden. Mit den bisher hergestellten Modulen können nur Phasen der Art ω^k erzeugt werden. Die Einträge im Korrelations-tensor können jedoch allgemeine komplexe Zahlen sein (wie aus Kapitel 4.5 bekannt). Deshalb ist es hier nötig, eine weitere Mischung zweier Module vorzunehmen. Die n -ten Einheitswurzeln stellen in der komplexen Ebene eine übervollständige Basis dar, es ist also möglich, eine beliebige, komplexe Zahl nach zwei Einheitswurzeln zu zerlegen (siehe dazu Abbildung 9.1). Die Zerlegung einer komplexen Zahl vom Betrag eins in zwei n -te

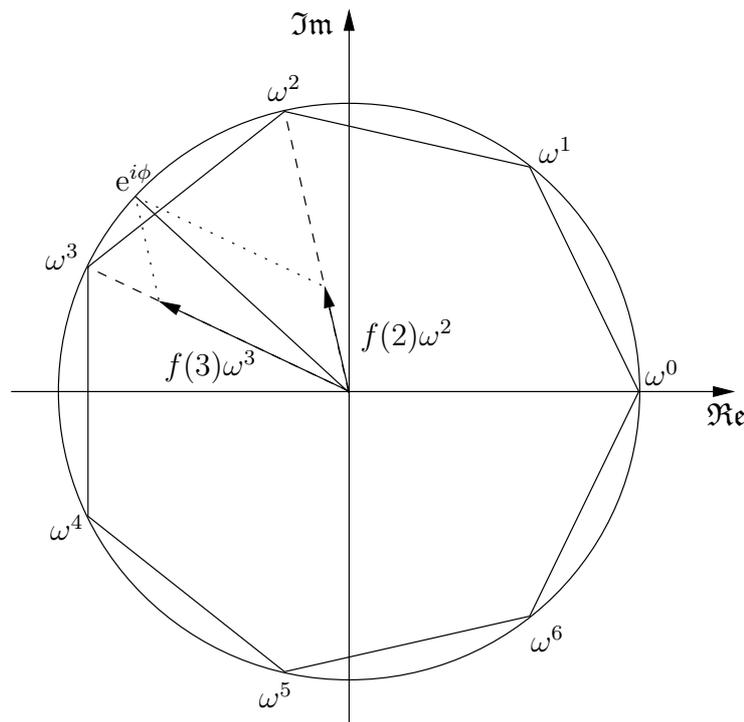


Abb. 9.1: Zerlegung einer allgemeinen Phase ϕ in zwei 7-te Einheitswurzeln

Einheitswurzeln hat die Form:

$$e^{i\phi} = f(j_1)\omega^{j_1} + f(j_2)\omega^{j_2}. \quad (9.27)$$

Man wählt zwei zur Phase ϕ benachbarte Einheitswurzeln, wobei für j_1 und j_2 gelten soll:

$$\frac{2\pi}{n}j_1 \leq \phi \leq \frac{2\pi}{n}j_2. \quad (9.28)$$

Die Mischungskoeffizienten $f(j_1)$ und $f(j_2)$ sind wieder positive reelle Zahlen. Nun kann man die Mischung zweier Module durchführen:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\text{Modul}}(\mathbf{c}, \phi, s) &= \frac{1}{\mathcal{N}_\phi} \left(f(j_1) \hat{\rho}_{\text{Modul}}(\mathbf{c}, s + j_1) + f(j_2) \hat{\rho}_{\text{Modul}}(\mathbf{c}, s + j_2) \right) \quad (9.29) \\ &= \frac{1}{\mathcal{N}_\phi} \frac{1}{n^N} \left((f(j_1) + f(j_2)) \hat{1} + \Xi f(j_1) \left(\omega^{s+j_1} \hat{C}_\mathbf{c} + \omega^{-s-j_1} \hat{C}_\mathbf{c}^{n-1} \right) \right. \\ &\quad \left. + \Xi f(j_2) \left(\omega^{s+j_2} \hat{C}_\mathbf{c} + \omega^{-s-j_2} \hat{C}_\mathbf{c}^{n-1} \right) \right). \end{aligned}$$

Aus Gründen der Normierung muss hier auch wieder gelten $f(j_1) + f(j_2) = \mathcal{N}_\phi$. Man kann dann weiter zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\text{Modul}}(\mathbf{c}, \phi, s) &= \frac{1}{\mathcal{N}_\phi} \frac{1}{n^N} \left(\mathcal{N}_\phi \hat{1} + \Xi \left(f(j_1) \omega^{j_1} + f(j_2) \omega^{j_2} \right) \omega^s \hat{C}_\mathbf{c} \right. \\ &\quad \left. + \Xi \left(f(j_1) \omega^{-j_1} + f(j_2) \omega^{-j_2} \right) \omega^{-s} \hat{C}_\mathbf{c}^{n-1} \right). \quad (9.30) \end{aligned}$$

Der Koeffizient vor dem Operator $\hat{C}_\mathbf{c}$ hat nach Gl. (9.27) den Wert $e^{i\phi}$, und der Koeffizient vor dem adjungierten Operator ist gerade das Komplexkonjugierte davon. Damit erhält man das Modul, wie es schon in Theorem 10 definiert ist:

$$\hat{\rho}_{\text{Modul}}(\mathbf{c}, \phi, s) = \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \Xi_\phi \left(e^{i\phi} \omega^s \hat{C}_\mathbf{c} + e^{-i\phi} \omega^{-s} \hat{C}_\mathbf{c}^\dagger \right) \right). \quad (9.31)$$

Allerdings steht hier eine Konstante $\Xi_\phi = \frac{\Xi}{\mathcal{N}_\phi}$, die zusätzlich noch von der Phase abhängen kann. Macht man eine Mischung von drei Modulen, ist es möglich, eine Mischung zu finden, bei der die Konstante unabhängig von der Phase ist und nur noch von Systemparametern abhängt. Auf diese Weise ist es möglich, Module durch Mischung von Paketen herzustellen.

10 Mischungsverfahren mit Modulen

10.1 Mischung verallgemeinerter WERNER-Zustände

Mit Hilfe der im letzten Kapitel definierten Module kann man einen beliebigen verallgemeinerten WERNER-Zustand auch für lokale Hilbertraumdimensionen $n \notin \mathbb{P}$ herstellen. Wieder benötigt man zur Mischung keine Phasen, da die Korrelationstensorelemente des Katzenzustands nur null oder eins sind ($\phi = 0$). Man kommt also mit den Modulen

$$\hat{\rho}_{\text{Modul}}(\mathbf{c}, 0) = \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \Xi (\hat{C}_{\mathbf{c}} + \hat{C}_{\mathbf{c}}^\dagger) \right) \quad (10.1)$$

aus. Alle Module \mathbf{c} , deren $\hat{C}_{\mathbf{c}}$ in der Produktoperatorentwicklung des Katzenzustands auftauchen, werden gemischt. Wie in Kapitel 8.1.2 berechnet, hat der Korrelationstensor der Katze N_p von null verschiedene Einträge. Hier kann im Prinzip wie in Kapitel 8.1 vorgegangen werden, nur, dass man statt der Pakete die Module verwendet:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\text{Misch}} &= \frac{1}{N_p} \sum_{a=0}^{n-1} \sum_{\mathbf{b}} \hat{\rho}_{\text{Modul}}(\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}, 0) \delta(\underline{\sum_{\mu=1}^N b_\mu} = 0) \\ &= \frac{1}{N_p} \frac{1}{n^N} \sum_{a=0}^{n-1} \sum_{\mathbf{b}} \left(\hat{1} + \Xi (\hat{C}_{\mathbf{c}} + \hat{C}_{\mathbf{c}}^\dagger) \right) \delta(\underline{\sum_{\mu=1}^N b_\mu} = 0) \\ &= \frac{1}{N_p} \frac{1}{n^N} \sum_{a=0}^{n-1} \sum_{\mathbf{b}} \hat{1} \delta(\underline{\sum_{\mu=1}^N b_\mu} = 0) \\ &\quad + \Xi \left(\sum_{a=0}^{n-1} \sum_{\mathbf{b}} \hat{C}_{\mathbf{c}} + \sum_{a=0}^{n-1} \sum_{\mathbf{b}} \hat{C}_{\mathbf{c}}^\dagger \right) \delta(\underline{\sum_{\mu=1}^N b_\mu} = 0). \end{aligned} \quad (10.2)$$

Der erste Term kann direkt aufsummiert werden, es ergibt sich gerade $N_p \hat{1}$. Der zweite Term stellt die Produktoperatorentwicklung des Katzenzustands dar. Mit den gleichen Argumenten wie in Kapitel 8.1.3 stellt auch hier der letzte Term die Produktoperatorentwicklung des Katzenzustands dar. Die Mischung führt auf den Zustand:

$$\hat{\rho}_{\text{Misch}} = \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \frac{2\Xi}{N_p} \sum_{a=0}^{n-1} \sum_{\mathbf{b}} \hat{C}_{\mathbf{c}} \delta(\underline{\sum_{\mu=1}^N b_\mu} = 0) \right). \quad (10.3)$$

Das entspricht dem verallgemeinerten WERNER-Zustand mit

$$\epsilon = \frac{2\Xi}{N_p} = \frac{2\Xi}{n^N - 1}. \quad (10.4)$$

Geht man zusätzlich davon aus, dass man Module mit $\Xi = \frac{1}{2}$ zur Verfügung hat, erhält man ein ϵ von:

$$\epsilon = \frac{1}{n^N - 1}. \quad (10.5)$$

Es ist sofort einsichtig, dass dieses ϵ schlechter ist als alle bisher erhaltenen. Allerdings ist die Vorgehensweise hier für beliebige lokale Hilbertraumdimensionen n erlaubt.

10.2 Mischung beliebiger „blasser“ Zustände

10.2.1 Zu mischender Zustand

Nun soll auf Basis der Module ein „blasser“ Zustand (siehe Kapitel 5.4) der Form

$$\hat{\rho}_{\text{bläss}} = \frac{1}{n^N} (1 - \epsilon) \hat{1} + \epsilon |\psi\rangle\langle\psi| \quad (10.6)$$

hergestellt werden, wobei $|\psi\rangle$ ein beliebiger, reiner Zustand ist. Ganz allgemein habe der Zustand $|\psi\rangle$ in der Produktbasis die Form:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\psi_{\text{norm}}} \sum_j \psi_j |j\rangle = \frac{1}{\psi_{\text{norm}}} \sum_j r_j e^{i\phi_j} |j\rangle \quad (10.7)$$

mit

$$\psi_{\text{norm}} = \sqrt{\sum_j |r_j|^2}. \quad (10.8)$$

Die dazu gehörige Dichtematrix kann dann folgendermaßen geschrieben werden:

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{\psi_{\text{norm}}^2} \sum_i \sum_j \psi_i \psi_j^* |i\rangle\langle j|. \quad (10.9)$$

Zunächst muss hier die Produktoperatorentwicklung des Zustands $|\psi\rangle$ berechnet werden. Aus Kapitel 4.4 und 4.5 ist für den Korrelationstensor bekannt:

$$u_{\{a,b\}} = \frac{1}{\psi_{\text{norm}}^2} \sum_j \psi_j \psi_{j-a}^* \omega^{a b} \omega^{-b j} = \frac{1}{\psi_{\text{norm}}^2} \sum_j r_j r_{j-a} e^{i(\phi_j - \phi_{j-a})} \omega^{a b} \omega^{-b j}. \quad (10.10)$$

Das komplexkonjugierte Element soll hier auch kurz angegeben werden, da dieses im Folgenden benötigt wird:

$$u_{\{a,b\}}^* = \frac{1}{\psi_{\text{norm}}^2} \sum_j \psi_j^* \psi_{j-a} \omega^{-a b} \omega^{b j} = \frac{1}{\psi_{\text{norm}}^2} \sum_j r_j r_{j-a} e^{-i(\phi_j - \phi_{j-a})} \omega^{-a b} \omega^{b j}. \quad (10.11)$$

Wie bekannt hat der „blasse“ Zustand die gleiche Produktoperatorentwicklung wie der Zustand $|\psi\rangle$, mit dem einzigen Unterschied, dass alle Korrelationen mit ϵ skaliert sind. Die Produktoperatorentwicklung des „blassen“ Zustands hat also die Form:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{\text{blasse}} &= \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \epsilon \sum_{\mathbf{c} \neq \mathbf{0}} u_{\mathbf{c}} \hat{C}_{\mathbf{c}} \right) \\ &= \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \epsilon \sum_{\mathbf{c} \neq \mathbf{0}} \left(\frac{1}{\psi_{\text{norm}}^2} \sum_{\mathbf{j}} r_{\mathbf{j}} r_{\mathbf{j}-\mathbf{a}} e^{i(\phi_{\mathbf{j}} - \phi_{\mathbf{j}-\mathbf{a}})} \omega^{\mathbf{a}\mathbf{b}} \omega^{-\mathbf{b}\mathbf{j}} \right) \hat{C}_{\mathbf{c}} \right).\end{aligned}\quad (10.12)$$

Dieser Zustand soll nun durch eine geschickte Mischung von Modulen hergestellt werden.

10.2.2 Mischung der Module

Die Module können mit jeder beliebigen Phase erzeugt werden. Somit ist es möglich, die Phasen der Einträge im Korrelationstensor herzustellen. Die unterschiedlichen Gewichte der Einträge im Korrelationstensor können über die positiven reellen Mischungskoeffizienten eingestellt werden. Die Mischungskoeffizienten werden aus diesem Grund gewählt zu (vgl. Gl. (10.10)):

$$K(\mathbf{c}, \mathbf{j}) = \frac{1}{\psi_{\text{norm}}^2} r_{\mathbf{j}} r_{\mathbf{j}-\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^+. \quad (10.13)$$

Der Übersichtlichkeit halber wird zunächst eine Vormischung durchgeführt. Es soll nur ein Paar von Einträgen im Korrelationstensor erzeugt werden, und zwar das zum Produktoperator $\hat{C}_{\mathbf{c}}$ und zu $\hat{C}_{\mathbf{c}}^\dagger$. Die beiden entsprechenden Einträge können durch Mischung von Modulen zu gleichem \mathbf{c} mit den richtig eingestellten Phasen erzeugt werden. Diese Prozedur muss für alle Einträge des Korrelationstensors durchgeführt werden. Sind alle Eintragspaare korrekt erzeugt, dann kann der Gesamtzustand durch Mischung der Vormischungen hergestellt werden. Für die Mischungen stehen die oben eingeführten Module

$$\hat{\rho}_{\text{Modul}}(\mathbf{c}, \phi, s) = \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \Xi \left(e^{i\phi} \omega^s \hat{C}_{\mathbf{c}} + e^{-i\phi} \omega^{-s} \hat{C}_{\mathbf{c}}^\dagger \right) \right) \quad (10.14)$$

zur Verfügung. Zunächst soll jetzt \mathbf{c} ein fester Indexvektor sein. Summiert wird über \mathbf{j} , wodurch sämtliche im Korrelationstensorelement auftretenden Phasen durch die geschickte Auswahl der Module

$$\hat{\rho}_{\text{Modul}}(\mathbf{c}, \phi_{\mathbf{j}} - \phi_{\mathbf{j}-\mathbf{a}}, -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{j} - \mathbf{a})) \quad (10.15)$$

gemischt werden können. Die Gewichte der Phasenfaktoren werden mit Hilfe der Mischungskoeffizienten $K(\mathbf{c}, \mathbf{j})$ erzeugt. Auf die Normierung wird hier zunächst verzichtet, diese soll erst in der endgültigen Mischung vorgenommen werden. Außerdem wird hier

von einem allgemeingültigen Ξ ausgegangen. Diese Annahme ist durchaus gerechtfertigt, wenn man Ξ nur klein genug wählt.

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{\text{vor}}(\mathbf{c}) &= \sum_{\mathbf{j}} K(\mathbf{c}, \mathbf{j}) \hat{\rho}_{\text{Modul}}(\mathbf{c}, \phi_{\mathbf{j}} - \phi_{\underline{\mathbf{j}-\mathbf{a}}}, -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{j} - \mathbf{a})) \\
&= \sum_{\mathbf{j}} \frac{1}{\psi_{\text{norm}}^2} r_{\mathbf{j}} r_{\underline{\mathbf{j}-\mathbf{a}}} \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \Xi e^{i(\phi_{\mathbf{j}} - \phi_{\underline{\mathbf{j}-\mathbf{a}}})} \omega^{-\mathbf{b} \cdot (\mathbf{j} - \mathbf{a})} \hat{C}_{\mathbf{c}} \right. \\
&\quad \left. + \Xi e^{-i(\phi_{\mathbf{j}} - \phi_{\underline{\mathbf{j}-\mathbf{a}}})} \omega^{\mathbf{b} \cdot (\mathbf{j} - \mathbf{a})} \hat{C}_{\mathbf{c}}^\dagger \right) \\
&= \frac{1}{n^N} \left(\sum_{\mathbf{j}} \frac{1}{\psi_{\text{norm}}^2} r_{\mathbf{j}} r_{\underline{\mathbf{j}-\mathbf{a}}} \hat{1} + \Xi \sum_{\mathbf{j}} \frac{1}{\psi_{\text{norm}}^2} r_{\mathbf{j}} r_{\underline{\mathbf{j}-\mathbf{a}}} e^{i(\phi_{\mathbf{j}} - \phi_{\underline{\mathbf{j}-\mathbf{a}}})} \omega^{-\mathbf{b} \cdot (\mathbf{j} - \mathbf{a})} \hat{C}_{\mathbf{c}} \right. \\
&\quad \left. + \Xi \sum_{\mathbf{j}} \frac{1}{\psi_{\text{norm}}^2} r_{\mathbf{j}} r_{\underline{\mathbf{j}-\mathbf{a}}} e^{-i(\phi_{\mathbf{j}} - \phi_{\underline{\mathbf{j}-\mathbf{a}}})} \omega^{\mathbf{b} \cdot (\mathbf{j} - \mathbf{a})} \hat{C}_{\mathbf{c}}^\dagger \right)
\end{aligned}$$

Der Faktor vor dem Einsoperator kommt von der fehlenden Normierung, dazu später. Betrachtet man den Faktor vor dem Produktoperator $\hat{C}_{\mathbf{c}}$, so stellt man fest, dass es sich wie erwünscht um das Korrelationstensorelement $u_{\mathbf{c}}$ dieses Produktoperators handelt (vgl. Gl. (10.10)). Der Faktor vor dem adjungierten Produktoperator $\hat{C}_{\mathbf{c}}^\dagger$ hingegen entspricht dem komplexkonjugierten Korrelationstensorelement $u_{\mathbf{c}}^*$ (siehe Gl. (10.11)). Man kann also abkürzend schreiben:

$$\hat{\rho}_{\text{vor}}(\mathbf{c}) = \frac{1}{n^N} \left(\sum_{\mathbf{j}} \frac{1}{\psi_{\text{norm}}^2} r_{\mathbf{j}} r_{\underline{\mathbf{j}-\mathbf{a}}} \hat{1} + \Xi \left(u_{\mathbf{c}} \hat{C}_{\mathbf{c}} + u_{\mathbf{c}}^* \hat{C}_{\mathbf{c}}^\dagger \right) \right). \quad (10.16)$$

Jetzt kann die Mischung aller dieser Vormischungen durchgeführt werden, gleichzeitig soll die korrekte Normierung mit Hilfe der Normierungskonstanten \mathcal{N} erfolgen.

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{\text{Misch}} &= \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{\substack{\mathbf{c} \\ \mathbf{c} \neq \mathbf{0}}} \hat{\rho}_{\text{vor}}(\mathbf{c}) \\
&= \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{1}{n^N} \left(\sum_{\substack{\mathbf{c} \\ \mathbf{c} \neq \mathbf{0}}} \sum_{\mathbf{j}} \frac{1}{\psi_{\text{norm}}^2} r_{\mathbf{j}} r_{\underline{\mathbf{j}-\mathbf{a}}} \hat{1} + \Xi \sum_{\substack{\mathbf{c} \\ \mathbf{c} \neq \mathbf{0}}} \left(u_{\mathbf{c}} \hat{C}_{\mathbf{c}} + u_{\mathbf{c}}^* \hat{C}_{\mathbf{c}}^\dagger \right) \right) \quad (10.17)
\end{aligned}$$

Hier folgt für die Normierung

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\psi_{\text{norm}}^2} \sum_{\substack{\mathbf{c} \\ \mathbf{c} \neq \mathbf{0}}} \sum_{\mathbf{j}} r_{\mathbf{j}} r_{\underline{\mathbf{j}-\mathbf{a}}} = \sum_{\substack{\mathbf{c} \\ \mathbf{c} \neq \mathbf{0}}} \sum_{\mathbf{j}} K(\mathbf{c}, \mathbf{j}) \quad (10.18)$$

eine reelle Zahl, die im konkreten Fall direkt berechnet werden kann. Die Summe über alle \mathbf{c} und alle \mathbf{j} entspricht der Anzahl aller zur Mischung verwendeten Module. Die

reellen Zahlen entsprechen den verwendeten Mischungskoeffizienten oder Gewichten der Module.

Es bleibt nun die folgende Dichtematrix:

$$\hat{\rho}_{\text{Misch}} = \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \frac{\Xi}{\mathcal{N}} \sum_{\substack{\mathbf{c} \\ \mathbf{c} \neq \mathbf{0}}} \left(u_{\mathbf{c}} \hat{C}_{\mathbf{c}} + u_{\mathbf{c}}^* \hat{C}_{\mathbf{c}}^\dagger \right) \right). \quad (10.19)$$

Der zweite Term, d.h. die Summe über $u_{\mathbf{c}} \hat{C}_{\mathbf{c}}$, stellt wie erhofft die Produktoperatorentwicklung des Zustands $|\psi\rangle$ dar. Nur noch der dritte Term muss hier genauer betrachtet werden. Dazu muss zunächst das Korrelationstensorelement $u_{\{\underline{a}, \underline{b}\}}$ berechnet werden, um eine Relation zwischen diesem und dem komplexkonjugierten Element $u_{\mathbf{c}}^*$ zu erhalten:

$$\begin{aligned} u_{\{\underline{a}, \underline{b}\}} &= \text{Spur} \{ \hat{C}_{\{\underline{a}, \underline{b}\}}^\dagger \hat{\rho} \} \\ &\stackrel{(4.7)}{=} \omega^{\mathbf{a} \mathbf{b}} \text{Spur} \{ \hat{C}_{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}} \hat{\rho} \} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \langle \mathbf{k} | \omega^{\mathbf{a} \mathbf{b}} \hat{C}_{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}} \frac{1}{\psi_{\text{norm}}^2} \sum_{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{j}} \psi_{\mathbf{i}} \psi_{\mathbf{j}}^* | \mathbf{i} \rangle \langle \mathbf{j} | \mathbf{k} \rangle \\ &= \frac{1}{\psi_{\text{norm}}^2} \omega^{\mathbf{a} \mathbf{b}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{j}} \psi_{\mathbf{i}} \psi_{\mathbf{j}}^* \langle \mathbf{k} | \hat{C}_{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}} | \mathbf{i} \rangle \langle \mathbf{j} | \mathbf{k} \rangle \\ &= \frac{1}{\psi_{\text{norm}}^2} \omega^{\mathbf{a} \mathbf{b}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{j}} \psi_{\mathbf{i}} \psi_{\mathbf{j}}^* \omega^{\mathbf{b} \mathbf{i}} \langle \mathbf{k} | \underline{\mathbf{i} + \mathbf{a}} \rangle \langle \mathbf{j} | \mathbf{k} \rangle \\ &= \frac{1}{\psi_{\text{norm}}^2} \omega^{\mathbf{a} \mathbf{b}} \sum_{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{j}} \psi_{\mathbf{i}} \psi_{\mathbf{j}}^* \omega^{\mathbf{b} \mathbf{i}} \delta_{\mathbf{j}, \underline{\mathbf{i} + \mathbf{a}}} . \end{aligned} \quad (10.20)$$

Die δ -Funktion kann umgeformt werden zu $\delta_{\mathbf{j}, \underline{\mathbf{i} + \mathbf{a}}} = \delta_{\underline{\mathbf{j} - \mathbf{a}}, \mathbf{i}}$ (siehe [22]), womit sich aus obiger Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} u_{\{\underline{a}, \underline{b}\}} &= \frac{1}{\psi_{\text{norm}}^2} \omega^{\mathbf{a} \mathbf{b}} \sum_{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{j}} \psi_{\mathbf{i}} \psi_{\mathbf{j}}^* \omega^{\mathbf{b} \mathbf{i}} \delta_{\underline{\mathbf{j} - \mathbf{a}}, \mathbf{i}} \\ &= \frac{1}{\psi_{\text{norm}}^2} \omega^{\mathbf{a} \mathbf{b}} \sum_{\mathbf{j}} \psi_{\underline{\mathbf{j} - \mathbf{a}}} \psi_{\mathbf{j}}^* \omega^{\mathbf{b} (\mathbf{j} - \mathbf{a})} \\ &= \frac{1}{\psi_{\text{norm}}^2} \sum_{\mathbf{j}} \psi_{\underline{\mathbf{j} - \mathbf{a}}} \psi_{\mathbf{j}}^* \omega^{\mathbf{b} \mathbf{j}} . \end{aligned} \quad (10.21)$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit Gl. (10.11), so findet man die Relation:

$$u_{\{\underline{a}, \underline{b}\}} = \omega^{\mathbf{a} \mathbf{b}} u_{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}}^*. \quad (10.22)$$

Mit Hilfe dieser Relation ist es nun möglich, die gemischte Dichtematrix (Gl. (10.19))

umzuformen:

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{\text{Misch}} &= \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \frac{\Xi}{\mathcal{N}} \sum_{\mathbf{c} \neq \mathbf{0}} \left(u_{\mathbf{c}} \hat{C}_{\mathbf{c}} + u_{\mathbf{c}}^* \hat{C}_{\mathbf{c}}^\dagger \right) \right) \\
&= \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \frac{\Xi}{\mathcal{N}} \sum_{\mathbf{c} \neq \mathbf{0}} \left(u_{\mathbf{c}} \hat{C}_{\mathbf{c}} + \omega^{-\mathbf{a}\mathbf{b}} u_{\{-\mathbf{a}, -\mathbf{b}\}} \omega^{\mathbf{a}\mathbf{b}} \hat{C}_{\{-\mathbf{a}, -\mathbf{b}\}} \right) \right) \\
&= \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \frac{\Xi}{\mathcal{N}} \sum_{\mathbf{c} \neq \mathbf{0}} \left(u_{\mathbf{c}} \hat{C}_{\mathbf{c}} + u_{\{-\mathbf{a}, -\mathbf{b}\}} \hat{C}_{\{-\mathbf{a}, -\mathbf{b}\}} \right) \right). \tag{10.23}
\end{aligned}$$

Da nun die Summe über alle erlaubten \mathbf{c} läuft, können beim letzten Term die Minuszeichen in den Indizes ohne Beschränkung der Allgemeinheit weggelassen werden. Jeder Operator ist mit dem richtigen Korrelationstensorelement versehen und kommt in der Summe einmal vor, die Reihenfolge ist unerheblich. Also stellen beide Terme die Produktoperatorentwicklung des Zustands $\hat{\rho}$ dar, und man kann zusammenfassen:

$$\hat{\rho}_{\text{Misch}} = \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \frac{2\Xi}{\mathcal{N}} \sum_{\mathbf{c} \neq \mathbf{0}} u_{\mathbf{c}} \hat{C}_{\mathbf{c}} \right). \tag{10.24}$$

Durch den Vergleich dieser Dichtematrix mit dem Zustand $\hat{\rho}_{\text{blass}}$ erhält man:

$$\epsilon = \frac{2\Xi}{\mathcal{N}}. \tag{10.25}$$

Über die Optimalität, d.h. ob ein Zustand direkt an der Separabilitätsgrenze erzeugt wird, kann hier keine Aussage getroffen werden, da es kein scharfes Separabilitätskriterium für diese Zustandsklasse gibt. Ist $|\psi\rangle$ kein verschränkter Zustand, beispielsweise ein Produktzustand, dann gibt es überhaupt keine Separabilitätsgrenze für den Zustand $\hat{\rho}_{\text{blass}}(\epsilon)$. Der Zustand ist unabhängig von ϵ immer separabel. Im Fall, dass $|\psi\rangle$ verschränkt ist, ist anzunehmen, dass ϵ suboptimal sein wird, da die Mischung von WERNER-Zuständen mit Hilfe der Module (siehe Kapitel 10.1) auch zu einem suboptimalen Mischungsparameter geführt hat.

Der gemischte Zustand ist in jedem Fall separabel, da er durch Mischung separabler Module entstanden ist. Aus diesem Grund ist das Mischungsverfahren ein *hinreichendes Separabilitätskriterium*.

Was noch erwähnt werden soll ist die Tatsache, dass man durch eine spezielle Produktoperatorauswahl die Mischung um einen Faktor zwei verbessern kann. Dazu müssen die Produktoperatoren in zwei Gruppen, die Operatoren und ihre adjungierten Operatoren, aufgeteilt werden. Außerdem sei erwähnt, dass im konkreten Fall die Korrelationstensorelemente komplexe Zahlen darstellen, und dass daraus Mischungskoeffizienten und Phasen direkt extrahiert werden können, d.h. auch die Vormischung wird überflüssig und pro Korrelationstensorelement wird nur ein Modul und ein Mischungskoeffizient benötigt. Ein Beispiel für die Mischung mit Modulen findet man im Anhang E.

11 Mischungsaufwand

Da wir es bei den bisher vorgestellten Mischungsvorschriften mit einer klassischen Simulation spezieller quantenmechanischer Zustände zu tun hatten, stellt sich die Frage, mit welchem Aufwand eine solche Simulation verbunden ist. Deshalb soll nun eine Aufwandsabschätzung durchgeführt werden.

11.1 Aufwandsdefinition

Die quantenmechanische Herstellung der verallgemeinerten WERNER-Zustände ist im Prinzip nicht sehr aufwendig. Ohne im Detail auf die quantenmechanische Zustandspräparation einzugehen, soll doch kurz die quantenmechanische Herstellung eines verallgemeinerten WERNER-Zustands betrachtet werden, um den Aufwandsunterschied im Vergleich zur klassischen Simulation klar zu machen. Quantenmechanisch kann der Zustand $\hat{\rho}_{\text{WERNER}}$ durch direkte Mischung eines total gemischten Zustands und eines verallgemeinerten Katzenzustands mittels des Mischungsparameters ϵ hergestellt werden. Den verallgemeinerten Katzenzustand kann man quantenmechanisch mit Hilfe einer geeigneten unitären Transformation präparieren. Dazu ist es nötig, einen Zustand, am besten den Grundzustand des Systems, zu verwenden und auf diesen die entsprechende Transformation anzuwenden. Im Fall von $n = 2$ sind diese unitären Transformationen durch CNOT-Operationen (siehe dazu [22]) darstellbar.

Im Falle der klassischen Mischung mit Hilfe von Produktzuständen ist die Herstellung, wie in dieser Arbeit vorgestellt, weit schwieriger. Es muss eine große Zahl an Produktzuständen erzeugt werden und deren Mischung mit den korrekten Gewichten erfolgen.

Um den Aufwand der unterschiedlichen Mischungsvorschriften messen zu können, braucht man zunächst eine sinnvolle Definition, wozu sich die folgende anbieten würde:

Definition 11: Präparations-Aufwand

Der Aufwand sei definiert als Anzahl der zur Mischung verwendeten Produktzustände:

$$A(n, N) := \text{Anzahl zu mischender Produktzustände.}$$

Im Allgemeinen wird der Aufwand eine Funktion der Zahl der Subsysteme N und der Niveauezahl je Subsystem n sein.

11.2 Mischungsaufwand für verallgemeinerte WERNER-Zustände

Jetzt soll das in Kapitel 8.1 vorgestellte Verfahren zur Mischung verallgemeinerter WERNER-Zustände untersucht werden, um den Aufwand der Mischung, also die Zahl der benötigten Produktzustände, abzuschätzen. Deshalb ist es zunächst nötig zu wissen, aus wie vielen Produktzuständen ein Paket aufgebaut ist (siehe dazu Kapitel 7.1). In Definition 9 wurden N_z Produktzustände verwendet, um ein Paket zu mischen. Die Zahl der Zustände N_z entspricht dem Entartungsgrad der Eigenwerte des Produktoperators und ist damit $N_z = n^{N-1}$ (siehe Gl. (4.16)).

Für die Mischung der verallgemeinerten WERNER-Zustände im nichtoptimalen Fall benötigt man N_p Pakete. Aus Kapitel 8.1.2 erhält man für die Paketanzahl $N_p = n^N - 1$. Damit ist die Zahl der Produktzustände, also der Aufwand im nichtoptimalen Fall, das Produkt der Paketanzahl N_p und der Anzahl der Zustände N_z je Paket:

$$A_{\text{nichtopt}}(n, N) = N_z N_p = n^{N-1}(n^N - 1) = n^{2N-1} - n^{N-1}. \quad (11.1)$$

Im optimalen Fall hingegen werden weniger Pakete verwendet, nämlich nur alle Pakete, die zu $a = 1$ gehören. In Kapitel 8.2.1 ergibt sich deren Anzahl zu $N_{p(a=1)} = n^{N-1}$ (siehe Gl. (8.17)). Zusätzlich ist noch eine spezielle Mischung von n Produktzuständen nötig. Damit kann wieder die Gesamtzahl an gemischten Produktzuständen, also der Aufwand, angegeben werden:

$$A_{\text{opt}}(n, N) = N_z N_{p(a=1)} + n = n^{2N-2} + n. \quad (11.2)$$

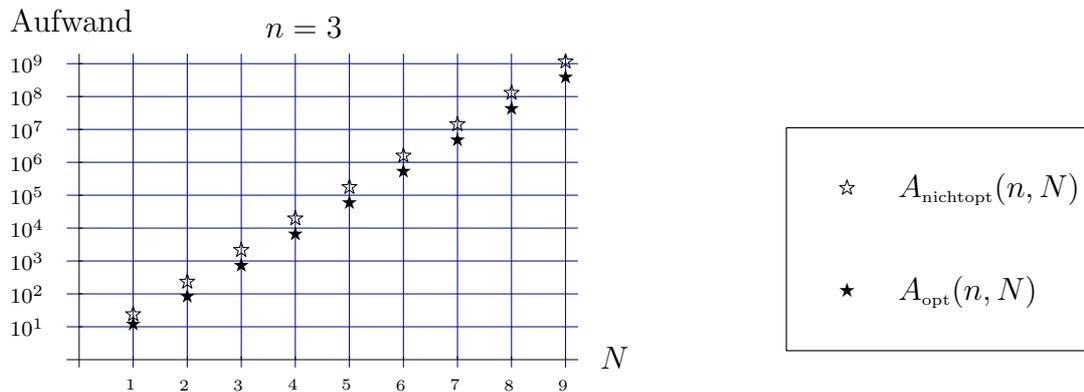


Abb. 11.1: Mischungsaufwand für die Mischung eines verallgemeinerten WERNER-Zustands (logarithmisch aufgetragen). Die mit ☆ gekennzeichneten Punkte gehören zur Funktion $A_{\text{nichtopt}}(n, N)$, die mit ★ gekennzeichneten zu $A_{\text{opt}}(n, N)$.

In Abbildung 11.1 sind die beiden Aufwandsfunktionen logarithmisch über der Zahl der Subsysteme für $n = 3$ aufgetragen. Zunächst sieht man, dass beide Aufwandsfunk-

tionen exponentiell mit der Zahl der Subsysteme anwachsen, für große N ungefähr mit dem gleichen Exponenten:

$$A_{\text{nichtopt}}(n, N) \sim n^{2N}, \quad A_{\text{opt}}(n, N) \sim n^{2N}. \quad (11.3)$$

Wie nun der Aufwand der suboptimalen im Vergleich zur optimalen Mischung ist, kann abgeschätzt werden. Man geht zunächst von folgendem Zusammenhang aus:

$$A_{\text{opt}}(n, N) = g A_{\text{nichtopt}}(n, N). \quad (11.4)$$

Aus dieser Gleichung kann g bestimmt werden, man erhält:

$$g = \frac{n^{-2N+2} + n^{-1}}{1 - n^{-N}}. \quad (11.5)$$

Interessant ist der Limes von g für große N , der leicht berechenbar ist, da der Zähler gegen n^{-1} und der Nenner gegen 1 gehen. Damit erhält man:

$$g_{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} g = \frac{1}{n}. \quad (11.6)$$

Das bedeutet, der Aufwand für die optimale Mischung ist um einen Faktor n geringer als der für die suboptimale Mischung. Dies ist auch unmittelbar einsichtig, da jedes Paket so geschickt gewählt wurde, dass es nicht nur einen Eintrag richtig erzeugt hat, sondern n richtige Einträge, wenn man den Eintrag für den Einsoperator auch mitzählt, d.h. man musste auch weniger Produktzustände zur Mischung verwenden. Also gilt hier ungefähr:

$$A_{\text{opt}}(n, N) \approx \frac{1}{n} A_{\text{nichtopt}}(n, N). \quad (11.7)$$

Trotzdem ist der praktische Aufwand im Fall der optimalen Mischung eigentlich höher, da eine Paketauswahl getroffen werden muss und zusätzlich ein spezieller Zustand benötigt wird.

11.3 Mischungsaufwand für „blasse“ Zustände

Jetzt soll die Mischungsvorschrift zur Mischung „blasser“ Zustände (siehe Kapitel 10) hinsichtlich des Aufwands untersucht werden. Um wieder mit der Definition 11 arbeiten zu können, muss man wissen, wie viele Produktzustände nötig sind, um ein Modul zu mischen. Hier soll eine grobe Abschätzung ausreichen. Aus Kapitel 9.4 wissen wir, dass jedes Modul aus $n - 2$ Paketen gemischt wird. Zur Mischung eines Moduls benötigt man also $(n - 2)N_z$ Produktzustände. Der Korrelationstensor hat n^{2N} Einträge (siehe Kapitel 4.4). Mit einem Modul lassen sich je zwei Einträge korrekt einstellen, d.h. wir benötigen zur Mischung $\frac{n^{2N}}{2}$ Module. Der Aufwand ist dann

$$A_{\text{Module}}(n, N) \approx (n - 2) N_z \frac{n^{2N}}{2} = \frac{1}{2} (n - 2) n^{3N-1}. \quad (11.8)$$

Damit wächst der Aufwand hier grob wie

$$A_{\text{Module}}(n, N) \sim n^{3N}, \quad (11.9)$$

also stärker als bei den Mischungsvorschriften mit Paketen. In Abbildung 11.2 ist der hier berechnete Aufwand gegen den der suboptimalen Mischung aus dem vorigen Kapitel aufgetragen. Man sieht ein deutlich stärkeres Anwachsen des Aufwands $A_{\text{blass}}(n, N)$.

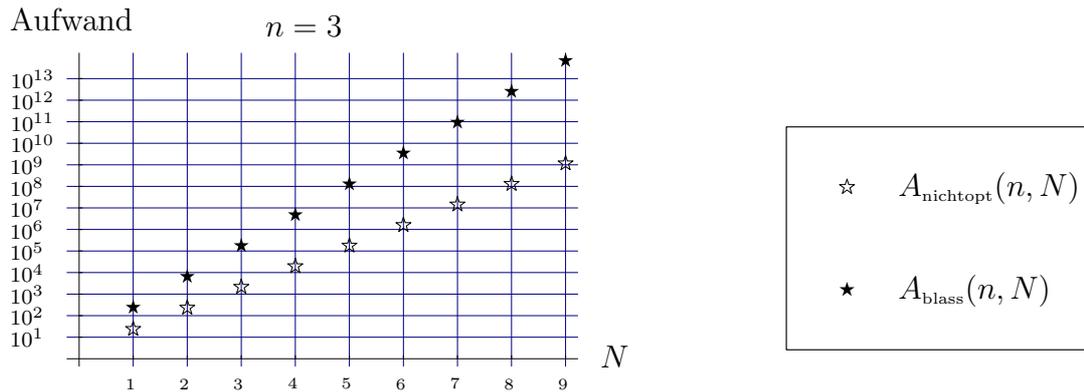


Abb. 11.2: Mischungsaufwand für die Mischung eines „blassen“ Zustands (★) (logarithmisch aufgetragen). Zum Vergleich der Aufwand für suboptimale Mischung verallgemeinerter WERNER-Zustände (☆).

Es kann wieder versucht werden, die Beziehung zwischen den Aufwandsfunktionen $A_{\text{Module}}(n, N)$ und $A_{\text{nichtopt}}(n, N)$ herzuleiten.

$$A_{\text{Module}}(n, N) = g' A_{\text{nichtopt}}(n, N) \quad (11.10)$$

Da jedoch der Aufwand bei der Mischung mit Modulen stärker wächst als der bei Mischung der Pakete, divergiert der Faktor g' .

12 Zusammenfassung und Ausblick

Gegenstand der vorliegenden Arbeit war die „klassische Simulierbarkeit“ quantenmechanischer Korrelationseigenschaften ausgewählter Zustandsklassen. Dabei ist es gelungen, Verfahren zu entwickeln, mit denen es möglich ist kompliziertere quantenmechanische Korrelationseigenschaften in abgeschwächter Form *modular* aus grundlegenden, „klassischen“ Korrelationen aufzubauen. Aufgrund dessen ist es möglich, Verschränkungseigenschaften bestimmter Zustandsklassen „klassisch“ zu simulieren, ohne „echte“ Verschränkung zur Verfügung zu haben. Die Separabilitätsgrenze scheint dadurch an physikalischer Bedeutung zu verlieren, da allein die Stärke der Korrelationen darüber entscheidet, ob ein Zustand verschränkt oder separabel ist. Man kann Korrelationen an sich also nicht einfach in „quantenmechanische“ und „klassische“ aufteilen. In diesem Zusammenhang ist die Rolle von Verschränkung mit den, schon in der Einleitung angesprochenen, Paradebeispielen der modernen Quantentheorie, „Teleportation“ [1], „Quantenkryptographie“ [2,3] und „Quantencomputer“ [4,5] in Zukunft noch genauer zu untersuchen.

Das hier vorgestellte Verfahren, basierend auf grundlegenden, separablen Quantenzuständen, den *Modulen*, macht es möglich jeden Zustand aus der Klasse der „blassen“ Zustände durch Mischung herzustellen, bzw. die Korrelationseigenschaften der Zustände „klassisch“ zu simulieren. Die so erzeugten „blassen“ Zustände sind auf jeden Fall separabel, da sie durch eine inkohärente Mischung separabler Zustände erzeugt werden. Das hat zur Folge, dass das Mischungsverfahren selbst ein *hinreichendes Separabilitätskriterium* ist. Die verwendeten Module haben des Weiteren die besondere Eigenschaft, dass sie jeweils die *minimale Anzahl an Korrelationen* enthalten, d.h. die Produktoperatorentwicklung der Module besteht aus nur zwei Produktoperatoren (es sind also genau zwei Korrelationstensorelemente von null verschieden; wegen der Hermitizität können es nicht weniger als zwei sein). Diese Minimaleigenschaft macht dem Verfahren erst die gesamte Zustandsklasse der „blassen“ Zustände zugänglich.

Das Mischungsverfahren wird im Allgemeinen *nicht optimal* arbeiten, d.h. es werden Zustände unterhalb der Separabilitätsgrenze erzeugt. So erhält man mit Hilfe der Module, bei Mischung eines WERNER-Zustands, in der Tat nur unterhalb der Separabilitätsgrenze liegende Zustände. Diese Aussage ist möglich, da für die WERNER-Zustände das *PERES-Kriterium* *hinreichendes* und *notwendiges* Separabilitätskriterium ist, und die Mischung zu einem Zustand unterhalb der PERES-Grenze führt. Das schließt aber nicht aus, dass es Zustände gibt, für die das Verfahren optimal arbeitet. Eine solche Klasse ist jedoch bis jetzt nicht bekannt.

Um ein Gefühl für die Güte der Mischung zu erhalten, ist es möglich, den durch

Mischung erzeugten Koeffizienten ϵ mit dem aus dem PERES-Kriterium berechneten zu vergleichen. Das normalerweise nur notwendige PERES-Kriterium könnte eventuell neben dem WERNER-Zustand auch noch für weitere Zustandsklassen zusätzlich hinreichend sein. Ist das nicht der Fall, so wäre zumindest eine Abschätzung der Entfernung von der PERES-Grenze möglich. Wegen der komplizierten Struktur des Zustandsraums wird diese Untersuchung nur numerisch möglich sein.

Des Weiteren ist es in dieser Arbeit gelungen, eine spezielle Mischungsvorschrift für eine spezielle Unterklasse der „blassen“ Zustände, die verallgemeinerten *WERNER-Zustände*, anzugeben. Mit diesem Verfahren ist es möglich, WERNER-Zustände direkt an der Separabilitätsgrenze herzustellen. Dazu können allerdings nicht die Module verwendet werden, sondern man muss speziell an diese Zustandsklasse angepasste separable Quantenzustände, die *Pakete*, zur Mischung verwenden. Jedes Paket ist in der Lage, gleichzeitig $n - 1$ von null verschiedene Einträge im Korrelationstensor des WERNER-Zustands richtig einzustellen. Damit sind die Pakete speziell für die Mischung von WERNER-Zuständen geeignet, aber zur Mischung anderer Zustände unbrauchbar. Die Optimalität dieses Verfahrens ist bewiesen, da die Mischung zu einem Zustand führt, der an der PERES-Grenze liegt. Hieraus folgt, dass für WERNER-Zustände das PERES-Kriterium sowohl notwendiges als auch hinreichendes Separabilitätskriterium ist.

Die für das spezielle Mischungsverfahren getroffenen Aussagen beziehen sich zunächst nur auf Systeme, bei denen die lokale Hilbertraumdimension n prim ist (das gilt im Übrigen nicht für die Mischungsvorschrift mit Modulen). In Zukunft wäre interessant, ob auch für alle anderen Systeme, also Systeme deren lokale Hilbertraumdimension nicht prim ist, eine solche optimale Mischungsvorschrift für WERNER-Zustände existiert. Eine weitere Fragestellung könnte sein, ob es für andere Zustandsklassen (Unterklassen der „blassen“ Zustände) außer den WERNER-Zuständen auch optimal angepasste, separable Pakete gibt, um eine Mischung direkt an der Separabilitätsgrenze zu erreichen. Auch die Frage, wie weit die mittels der Module gemischten „blassen“ Zustände von der Separabilitätsgrenze entfernt sind, bleibt offen.

Insgesamt sind alle hier vorgestellten „klassischen“ Mischungsvorschriften mit einem exponentiellen Aufwand verbunden, d.h. die klassische Simulation quantenmechanischer Vorgänge ist, wie erwartet, für große Systeme exponentiell schwierig. Die Frage, ob überhaupt sämtliche quantenmechanischen Vorgänge, wenn auch mit hohem Aufwand, klassisch simulierbar sind, ist damit aber noch nicht geklärt.

Das in dieser Arbeit verwendete Verfahren der Produktoperatorentwicklung ist auf jeden Fall ein sehr mächtiges Werkzeug zur Untersuchung quantenmechanischer Korrelationen. Schließlich bleibt offen, ob die hier entwickelten Verfahren und Techniken auf den gesamten quantenmechanischen Zustandsraum ausdehnbar sind und es mit deren Hilfe möglich ist, noch nicht geklärte Fragen im Bezug auf den Zustandsraum zu beantworten.

Zum Schluss sollen nochmals die in dieser Arbeit entwickelten Zustände und Mischungsverfahren im Überblick zusammengefasst werden:

Mischung „blasser“ Zustände:

$$\hat{\rho}_{\text{blass}} = \frac{1}{n^N} (1 - \epsilon) \hat{1} + \epsilon \hat{\rho}_{\text{rein}}$$

1. Ressourcen: Module

$$\hat{\rho}_{\text{Modul}}(\mathbf{c}, \phi) = \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \Xi \left(e^{i\phi} \hat{C}_{\mathbf{c}} + e^{-i\phi} \hat{C}_{\mathbf{c}}^\dagger \right) \right)$$

2. Modulauswahl: $u_{\mathbf{c}}(\hat{\rho}_{\text{rein}}) = \text{Spur} \{ \hat{C}_{\mathbf{c}}^\dagger \hat{\rho}_{\text{rein}} \}$

- Phase: $\phi_{\mathbf{c}} = \text{Arg} \{ u_{\mathbf{c}}(\hat{\rho}_{\text{rein}}) \}$
- Mischungskoeffizienten:

$$K(\mathbf{c}) = |u_{\mathbf{c}}(\hat{\rho}_{\text{rein}})|$$

3. Mischung:

$$\hat{\rho}_{\text{Misch}} = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{\mathbf{c}} K(\mathbf{c}) \hat{\rho}_{\text{Modul}}(\mathbf{c}, \phi_{\mathbf{c}})$$

4. Ergebnis:

$$\epsilon = \frac{2\Xi}{\mathcal{N}}$$

$$\text{Für } \hat{\rho}_{\text{rein}} = \hat{\rho}_{\text{Katze}}: \epsilon = \frac{1}{n^{N-1}}$$

Mischung WERNER-Zustände:

$$\hat{\rho}_{\text{WERNER}} = \frac{1}{n^N} (1 - \epsilon) \hat{1} + \epsilon \hat{\rho}_{\text{Katze}}$$

1. Ressourcen: Pakete

$$\hat{\rho}_{\text{Paket}}(\mathbf{c}, s) = \frac{1}{n^N} \left(\hat{1} + \sum_{\sigma=1}^{n-1} \omega^{s\sigma} \hat{C}_{\mathbf{c}}^\sigma \right)$$

2. Paketauswahl: $u_{\mathbf{c}}(\hat{\rho}_{\text{Katze}}) = \text{Spur} \{ \hat{C}_{\mathbf{c}}^\dagger \hat{\rho}_{\text{Katze}} \}$

- Phasen: $s_{\mathbf{c}} = 0$
- Mischungskoeffizienten:

$$K(\mathbf{c}) = 1$$

$$\text{für } \mathbf{a} = \{a, \dots, a\}, \underline{\sum_{\mu=1}^N b_{\mu}} = 0;$$

$$\text{sonst } K(\mathbf{c}) = 0$$

3. Mischung:

$$\hat{\rho}_{\text{Misch}} = \frac{1}{N_p} \sum_{\mathbf{a}} \sum_{\mathbf{b}} \hat{\rho}_{\text{Paket}}(\mathbf{c}, 0) \delta(\underline{\sum_{\mu=1}^N b_{\mu}} = 0)$$

4. Ergebnis:

$$\epsilon = \frac{n-1}{n^{N-1}}$$

$$\text{Mit speziellen Tricks: } \epsilon = \frac{1}{n^{N-1}+1}$$

Anhang

A Beispiele für unitäre Operatoren:

Die folgenden Beispiele für unitäre Operatoren sind aus [22] entnommen.

Unitäre Operatoren für $n = 2$:

$$U_{0,0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U_{0,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_z$$

$$U_{1,0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_x \quad U_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_y$$

Unitäre Operatoren für $n = 3$:

$$U_{0,0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U_{0,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix} \quad U_{0,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix}$$

$$U_{1,0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \end{pmatrix} \quad U_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{\frac{2\pi i}{3}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$U_{2,0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{2\pi i}{3}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Unitäre Operatoren für $n = 4$:

$$U_{0,0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U_{0,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \quad U_{0,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad U_{0,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

$$U_{1,0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad U_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U_{2,0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U_{3,0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_{3,3} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B Eigensystem unitärer Operatoren

B.1 Eigensystem von allen Operatoren mit $a = 0$

Die Eigenwerte für alle unitären Operatoren mit $a = 0$ sind einfach zu berechnen, da die Operatoren schon Diagonalform haben. Aus

$$\begin{aligned}\hat{U}_{0,b}|m\rangle &= \sum_{p=0}^{n-1} \omega^{bp} |p\rangle \underbrace{\langle p|m\rangle}_{\delta_{p,m}} \\ &= \omega^{bm} |m\rangle\end{aligned}\tag{B.1}$$

kann man direkt die Eigenwerte und Eigenzustände ablesen

$$\begin{aligned}\lambda_m &= \omega^{bm} \\ |\lambda_m\rangle &= |m\rangle.\end{aligned}\tag{B.2}$$

B.2 Eigensystem von allen Operatoren mit $a \neq 0$

Für diesen Fall ist die Herleitung einer geschlossenen Form für Eigenwerte und Eigenzustände nicht ganz so einfach und folgt der aus [22]. Ausgangspunkt ist die Eigenwertgleichung

$$\hat{U}_{a,b}|\lambda_m\rangle = \lambda_m|\lambda_m\rangle.\tag{B.3}$$

Hier wird für den Eigenzustand eine Entwicklung in die Basis-Zustände $|l\rangle$ des Hilbert-raums mit n Dimensionen angenommen:

$$|\lambda_m\rangle = \sum_{l=0}^{n-1} c_l(m)|l\rangle,\tag{B.4}$$

mit $c_l(m)$ als Entwicklungskoeffizient. Setzt man diesen Ansatz in B.3 ein, erhält man nach einiger Rechnung eine Rekursionsformel für die Koeffizienten

$$c_{\underline{p+a}}(m) = \frac{\omega^{bp}}{\lambda_m} c_p(m).\tag{B.5}$$

Einer der Koeffizienten $c_p(m)$ ist unabhängig wählbar, da Eigenzustände nur bis auf eine Normierung bestimmt sind. Man wählt $c_l(m) = 1$. Setzt man dies in die Rekursion ein und macht s Rekursionsschritte, erhält man:

$$c_{l+sa} = \frac{1}{\lambda_m^s} \omega^{bls} \omega^{ab\frac{s(s-1)}{2}}.\tag{B.6}$$

Im Folgenden muss zwischen weiteren zwei Fällen unterschieden werden. Ist $n \in \mathbb{P}$, wird die Rekursion erst nach n Schritten wieder den gleichen Koeffizienten erzeugen. Es gilt die Ringbedingung

$$c_{\underline{l+na}} = c_l.\tag{B.7}$$

Ist jedoch $n \notin \mathbb{P}$, so kann es bei einigen Operatoren, d.h. bei bestimmten Indexpaaren $\{a, b\}$, schon bei weniger als n Rekursionsschritten zur Erzeugung gleicher Koeffizienten kommen.

Zunächst jedoch der gutmütige erste Fall: Setzt man **B.6** in **B.7** ein und berücksichtigt desweiteren, dass $c_l(m) = 1$ gewählt wurde, erhält man eine Gleichung, die nach $(\lambda_m)^n$ auflösbar ist. Zieht man die n -te Wurzel, erhält man die Eigenwerte der unitären Operatoren:

$$\lambda_m = \omega^{bl} \omega^{ab \frac{n-1}{2} + m}. \quad (\text{B.8})$$

Es genügt hier $l = 0$ zu betrachten, da die anderen möglichen l zu keinen neuen Eigenwerten führen. m nummeriert hier immer den Eigenzustand.

Im zweiten Fall, d.h. $n \notin \mathbb{P}$, gibt es Operatoren mit Entartungen im Spektrum. Gilt für n Definition 4, treten Entartungen im Spektrum bei allen Operatoren auf, deren Indizes Vielfache eines Primfaktors p_k von n sind, d.h.

$$a = x_a p_k, \quad b = x_b p_k, \quad x_a, x_b \in \mathbb{N}. \quad (\text{B.9})$$

Für alle anderen Operatoren ändert sich nichts an der obigen Rechnung. Diese speziellen Operatoren haben eine andere Ringbedingung, da nicht erst nach der n -ten Iteration der gleiche Koeffizient auftritt, sondern schon nach der $s = \frac{nx_a}{a}$ ten Iteration. Wie oben können damit die Eigenwerte dieser Operatoren bestimmt werden:

$$\lambda_m = \omega^{bl} \omega^{\frac{ab}{2} \left(\frac{nx_a}{a} - 1 \right) + \frac{ma}{x_a}}. \quad (\text{B.10})$$

Hier kann nicht nur $l = 0$ betrachtet werden. Zu jedem l gehören $\frac{nx_a}{a}$ verschiedene m . Damit alle Eigenwerte erreicht werden, muss gelten $l = 0 \dots \frac{a}{x_a} - 1$, wobei $\frac{a}{x_a}$ den Entartungsgrad der Eigenzustände darstellt.

Auch die Eigenzustände können nun angegeben werden. Zunächst wieder der gutmütige Fall ohne Entartung. Man setzt den für die Eigenwerte gefundenen Ausdruck **B.8** in die Rekursionsformel **B.5** ein. Der s -te Koeffizient lautet dann

$$c_{sa}(m) = \omega^{\frac{ab}{2} s(s-n) - ms}. \quad (\text{B.11})$$

Setzt man die so gewonnenen Koeffizienten in Gleichung **B.4** ein, erhält man nach korrekter Normierung den Eigenzustand

$$|\lambda_m\rangle = \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} \omega^{\frac{ab}{2} s(s-n) - ms} |s\rangle. \quad (\text{B.12})$$

Bei allen unitären Operatoren, die ein entartetes Spektrum aufweisen, geht man genauso vor, nur dass hier die Eigenwerte **B.10** verwendet werden. Als Eigenzustand nach entsprechender Normierung erhält man hier

$$|\lambda_{m,l}\rangle = \frac{nx_a}{a} \sum_{s=0}^{\frac{nx_a}{a} - 1} c_{l+sa}(m) |l + sa\rangle, \quad (\text{B.13})$$

mit dem Koeffizienten

$$c_{l+sa}(m) = (-1)^{bx_a s} \omega^{\frac{ab}{2} s^2 - \frac{ams}{x_a}}. \quad (\text{B.14})$$

C Mischungen mit Paketen

C.1 Verallgemeinerter WERNER-Zustand (n prim)

System: $N = 2$ Knoten mit $n = 3$ Niveaus

1. Katzenzustand:

$$|\text{Katze}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|0, 0\rangle + |1, 1\rangle + |2, 2\rangle)$$

2. Dichtematrix des Katzenzustands:

$$\hat{\rho}_{\text{Katze}} = \frac{1}{3} (|0, 0\rangle\langle 0, 0| + |0, 0\rangle\langle 1, 1| + |0, 0\rangle\langle 2, 2| + |1, 1\rangle\langle 0, 0| + |1, 1\rangle\langle 1, 1| \\ + |1, 1\rangle\langle 2, 2| + |2, 2\rangle\langle 0, 0| + |2, 2\rangle\langle 1, 1| + |2, 2\rangle\langle 2, 2|)$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \langle 0, 0| & \langle 0, 1| & \langle 0, 2| & \langle 1, 0| & \langle 1, 1| & \langle 1, 2| & \langle 2, 0| & \langle 2, 1| & \langle 2, 2| \\ |0, 0\rangle & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ |0, 1\rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ |0, 2\rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ |1, 0\rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ |1, 1\rangle & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ |1, 2\rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ |2, 0\rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ |2, 1\rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ |2, 2\rangle & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Korrelationstensor:

$$u_{c_1, c_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Produktoperatorentwicklung des Katzenzustands: Aus dem Korrelationstensor folgt die Entwicklung:

$$\hat{\rho}_{\text{Katze}} = \frac{1}{9} (\hat{1} + \hat{C}_{\{1,2\}} + \hat{C}_{\{2,1\}} + \hat{C}_{\{3,3\}} + \hat{C}_{\{4,5\}} + \hat{C}_{\{5,4\}} + \hat{C}_{\{6,6\}} + \hat{C}_{\{7,8\}} + \hat{C}_{\{8,7\}})$$

5. Verallgemeinerter WERNER-Zustand:

$$\hat{\rho}_{\text{Werner}} = \frac{1}{9}(1-\epsilon)\hat{1} + \epsilon\hat{\rho}_{\text{Katze}} = \begin{pmatrix} \frac{1+2\epsilon}{9} & 0 & 0 & 0 & \frac{\epsilon}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{\epsilon}{3} \\ 0 & \frac{1-\epsilon}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\epsilon}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\epsilon}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\epsilon}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1+2\epsilon}{9} & 0 & 0 & 0 & \frac{\epsilon}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\epsilon}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\epsilon}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\epsilon}{9} & 0 \\ \frac{\epsilon}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{\epsilon}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1+2\epsilon}{9} \end{pmatrix}$$

6. **Benötigte Zustände:** Nur Pakete, die zu $a = 1$ gehören (Achtung, bisher wurden die Produktoperatoren mit $\{c_1, c_2\}$ indiziert. Jetzt muss man die extrahieren, die zu $a = 1$ gehören).

$$\hat{\rho}_{\text{Paket}}(\{3,3\}, 0) = \frac{1}{9}(\hat{1} + \sum_{\sigma=1}^2 \hat{C}_{\{3,3\}}^{\sigma}) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\rho}_{\text{Paket}}(\{4,5\}, 0) = \frac{1}{9}(\hat{1} + \sum_{\sigma=1}^2 \hat{C}_{\{4,5\}}^{\sigma}) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \omega^1 & \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \omega^2 & 0 & 0 & 0 & \omega^1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \omega^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 1 & \omega^1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^1 & 0 & 0 & 0 & \omega^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 & \omega^1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\rho}_{\text{Paket}}(\{5,4\}, 0) = \frac{1}{9}(\hat{1} + \sum_{\sigma=1}^2 \hat{C}_{\{5,4\}}^{\sigma}) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \omega^2 & \omega^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \omega^1 & 0 & 0 & 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \omega^1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \omega^1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 & 0 & 0 & \omega^1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^1 & \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mischung dieser Pakete:

$$\hat{\rho}_{a=1} = \frac{1}{3}(\hat{\rho}_{\text{Paket}}(\{3,3\}, 0) + \hat{\rho}_{\text{Paket}}(\{4,5\}, 0) + \hat{\rho}_{\text{Paket}}(\{5,4\}, 0))$$

Spezielle Mischung:

$$\hat{\rho}_{\text{spez.}} = \frac{1}{9}(\hat{1} + \hat{C}_{\{1,2\}} + \hat{C}_{\{2,1\}}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Mischung eines optimalen WERNER-Zustands:

Gewichtete Mischung ($N_{p(a=1)} = 3$):

$$\hat{\rho} = \frac{1}{4}(3\hat{\rho}_{a=1} + \hat{\rho}_{\text{spez.}}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 \\ \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

8. Berechnung ϵ : Aus dem Vergleich mit 5. folgt:

$$\epsilon = \frac{1}{4} \quad \epsilon_{\text{Peres}} = \frac{1}{n^{N-1} + 1} = \frac{1}{4}$$

In diesem Fall wäre auch die Mischung aller Pakete optimal gewesen, was für größere Systeme nicht mehr gilt. Hätte man die Berechnung auf Basis der Eigenzustände unitärer Operatoren durchgeführt ohne die Theorie der Produktoperatorentwicklung, dann hätte man für die Mischung schon 24 Zustände berechnen müssen. Der Aufwand wäre ungemein höher gewesen.

C.2 Verallgemeinerter WERNER-Zustand (n nichtprim)

System: $N = 2$ Knoten mit $n = 4$ Niveaus

1. Katzenzustand:

$$|\text{Katze}\rangle = \frac{1}{2}(|0, 0\rangle + |1, 1\rangle + |2, 2\rangle + |3, 3\rangle)$$

2. Produktoperatorentwicklung des Katzenszustands: $\mathbf{c} = \{c_1, c_2\}$

$$\hat{\rho}_{\text{Katze}} = \frac{1}{16} \left(\hat{1} + \hat{C}_{1,3} + \hat{C}_{2,2} + \hat{C}_{3,1} + \hat{C}_{4,4} + \hat{C}_{5,7} + \hat{C}_{6,6} + \hat{C}_{7,5} + \hat{C}_{8,8} \right. \\ \left. + \hat{C}_{9,11} + \hat{C}_{10,10} + \hat{C}_{11,9} + \hat{C}_{12,12} + \hat{C}_{13,15} + \hat{C}_{14,14} + \hat{C}_{15,13} \right)$$

3. Pakete: Nun sollen alle Pakete erzeugt werden für die gilt: $a_1 = 1$ und $a_2 = 1$.

$$\hat{\rho}_{\text{Paket}}(\{4,4\}, 0) = \frac{1}{16} \left(\hat{1} + \sum_{\sigma=1}^3 \hat{C}_{4,4}^{\sigma} \right) = \frac{1}{16} \left(\hat{1} + \hat{C}_{4,4} + \hat{C}_{8,8} + \hat{C}_{12,12} \right)$$

$$\hat{\rho}_{\text{Paket}}(\{5,7\}, 0) = \frac{1}{16} \left(\hat{1} + \sum_{\sigma=1}^3 \hat{C}_{5,7}^{\sigma} \right) = \frac{1}{16} \left(\hat{1} + \hat{C}_{5,7} + \hat{C}_{10,10} + \hat{C}_{15,13} \right)$$

$$\hat{\rho}_{\text{Paket}}(\{7,5\}, 0) = \frac{1}{16} \left(\hat{1} + \sum_{\sigma=1}^3 \hat{C}_{7,5}^{\sigma} \right) = \frac{1}{16} \left(\hat{1} + \hat{C}_{7,5} + \hat{C}_{10,10} + \hat{C}_{13,15} \right)$$

$$\hat{\rho}_{\text{Paket}}(\{6,6\}, 0) = \frac{1}{16} \left(\hat{1} + \sum_{\sigma=1}^3 \hat{C}_{6,6}^{\sigma} \right) = \frac{1}{16} \left(\hat{1} + \hat{C}_{6,6} + \hat{C}_{8,8} + \hat{C}_{14,14} \right)$$

Mischung dieser Pakete:

$$\hat{\rho}_{a=1} = \frac{1}{4} \frac{1}{16} \left(4 \hat{1} + \hat{C}_{4,4} + \hat{C}_{5,7} + \hat{C}_{6,6} + \hat{C}_{7,5} + 2 \hat{C}_{8,8} \right. \\ \left. + 2 \hat{C}_{10,10} + \hat{C}_{12,12} + \hat{C}_{13,15} + \hat{C}_{14,14} + \hat{C}_{15,13} \right)$$

Man erkennt sofort das Problem: Neben den, wie erwartet, fehlenden Operatoren zu $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ sind zwei Operatoren, nämlich $\hat{C}_{8,8}$, $\hat{C}_{10,10}$, doppelt vorhanden und zwei fehlen ganz $\hat{C}_{9,11}$, $\hat{C}_{11,9}$.

4. Korrekturpakete:

$$\hat{\rho}_{\text{Paket}}(\{9,11\}, 0) = \frac{1}{16} \left(\hat{1} + \sum_{\sigma=1}^3 \hat{C}_{9,11}^{\sigma} \right) = \frac{1}{16} \left(\hat{1} + \hat{C}_{9,11} + \hat{C}_{2,2} + \hat{C}_{11,9} \right)$$

$$\hat{\rho}_{\text{Paket}}(\{8,8\}, 2) = \frac{1}{16} \left(\hat{1} + \sum_{\sigma=1}^1 \omega^{2\sigma} \hat{C}_{8,8}^{\sigma} \right) = \frac{1}{16} \left(\hat{1} - \hat{C}_{8,8} \right)$$

$$\hat{\rho}_{\text{Paket}}(\{10,10\}, 2) = \frac{1}{16} \left(\hat{1} + \sum_{\sigma=1}^1 \omega^{2\sigma} \hat{C}_{10,10}^{\sigma} \right) = \frac{1}{16} \left(\hat{1} - \hat{C}_{10,10} \right)$$

Selbst das erste Korrekturpaket enthält noch einen Fehlterm, den Operator $\hat{C}_{2,2}$, um diesen zu entfernen, benötigt man noch ein weiteres Paket.

$$\hat{\rho}_{\text{Paket}}(\{2,2\}, 2) = \frac{1}{16} \left(\hat{1} + \sum_{\sigma=1}^1 \omega^{2\sigma} \hat{C}_{2,2}^{\sigma} \right) = \frac{1}{16} \left(\hat{1} - \hat{C}_{2,2} \right)$$

5. **Spezielle Pakete:** Bis jetzt fehlen noch alle Produktoperatoren mit $\mathbf{a} = \mathbf{0}$

$$\hat{\rho}_{\text{Paket}}(\{1,3\}, 0) = \frac{1}{16} \left(\hat{1} + \sum_{\sigma=1}^3 \hat{C}_{1,3}^{\sigma} \right) = \frac{1}{16} \left(\hat{1} + \hat{C}_{1,3} + \hat{C}_{2,2} + \hat{C}_{3,1} \right)$$

6. **Mischung aller Pakete:**

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \frac{1}{9} \left(\hat{\rho}_{\text{Paket}}(\{4,4\}, 0) + \hat{\rho}_{\text{Paket}}(\{5,7\}, 0) + \hat{\rho}_{\text{Paket}}(\{7,5\}, 0) + \hat{\rho}_{\text{Paket}}(\{6,6\}, 0) \right. \\ &\quad + \hat{\rho}_{\text{Paket}}(\{9,11\}, 0) + \hat{\rho}_{\text{Paket}}(\{8,8\}, 2) + \hat{\rho}_{\text{Paket}}(\{10,10\}, 2) \\ &\quad \left. + \hat{\rho}_{\text{Paket}}(\{2,2\}, 2) + \hat{\rho}_{\text{Paket}}(\{1,3\}, 0) \right) \\ &= \frac{1}{9} \frac{1}{16} \left(9 \hat{1} + \hat{C}_{4,4} + \hat{C}_{8,8} + \hat{C}_{12,12} + \hat{C}_{5,7} + \hat{C}_{10,10} + \hat{C}_{15,13} \right. \\ &\quad + \hat{C}_{7,5} + \hat{C}_{10,10} + \hat{C}_{13,15} + \hat{C}_{6,6} + \hat{C}_{8,8} + \hat{C}_{14,14} \\ &\quad \left. + \hat{C}_{9,11} + \hat{C}_{2,2} + \hat{C}_{11,9} - \hat{C}_{8,8} - \hat{C}_{10,10} - \hat{C}_{2,2} + \hat{C}_{1,3} + \hat{C}_{2,2} + \hat{C}_{3,1} \right) \\ &= \frac{1}{16} \left(\hat{1} + \frac{1}{9} \left(\hat{C}_{4,4} + \hat{C}_{8,8} + \hat{C}_{12,12} + \hat{C}_{5,7} + \hat{C}_{10,10} + \hat{C}_{15,13} + \hat{C}_{7,5} + \hat{C}_{13,15} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \hat{C}_{6,6} + \hat{C}_{14,14} + \hat{C}_{9,11} + \hat{C}_{11,9} + \hat{C}_{1,3} + \hat{C}_{2,2} + \hat{C}_{3,1} \right) \right) \end{aligned}$$

7. **Ergebnis:** Die Mischung ist nun erfolgreich durchgeführt, alle Produktoperatoren sind vorhanden. Das Ergebnis ist ein WERNER-Zustand mit

$$\epsilon = \frac{1}{9} \quad \epsilon_{\text{opt}} = \frac{1}{n^{N-1} + 1} = \frac{1}{5}.$$

D.h. man ist weit unterhalb der in [6, 25] angegebenen Separabilitätsgrenze für WERNER-Zustände.

D Beispiel zur Mischung eines Moduls

System: $N = 2$ Knoten mit $n = 5$ Niveaus

1. **Zu mischendes Modul:** (Hier gilt $\hat{C}_c^\dagger = \hat{C}_c^{n-1}$, da n ungerade ist.)

$$\hat{\rho}_{\text{Modul}}(\mathbf{c}, 1) = \frac{1}{25} \left(\hat{1} + \Xi \left(\omega \hat{C}_c + \omega^4 \hat{C}_c^4 \right) \right)$$

2. **Pakete:**

$$\hat{\rho}_{\text{Paket}}(\mathbf{c}, s) = \frac{1}{25} \left(\hat{1} + \sum_{\sigma=1}^4 \omega^{s\sigma} \hat{C}_c^\sigma \right)$$

3. **Mischung der ausgewählten Pakete:**

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\text{Modul}}(\mathbf{c}, k=1) &= \frac{1}{\mathcal{N}} \left(\sum_{\eta=1}^1 \left(r(\eta) \hat{\rho}_{\text{Paket}}(\mathbf{c}, \eta + k) + r(5 - \eta) \hat{\rho}_{\text{Paket}}(\mathbf{c}, 5 - \eta + k) \right) \right. \\ &\quad \left. + \hat{\rho}_{\text{Paket}}(\mathbf{c}, k) \right) \\ &= \frac{1}{\mathcal{N}} \left(r(1) \hat{\rho}_{\text{Paket}}(\mathbf{c}, 2) + r(4) \hat{\rho}_{\text{Paket}}(\mathbf{c}, 5-0) + \hat{\rho}_{\text{Paket}}(\mathbf{c}, 1) \right) \\ &= \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{1}{25} \left(\left(1 + r(1) + r(4) \right) \hat{1} \right. \\ &\quad \left. + \left(\omega^1 + r(1) \omega^2 + r(4) \right) \hat{C}_c + \left(\omega^2 + r(1) \omega^4 + r(4) \right) \hat{C}_c^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\omega^3 + r(1) \omega^6 + r(4) \right) \hat{C}_c^3 + \left(\omega^4 + r(1) \omega^8 + r(4) \right) \hat{C}_c^4 \right) \end{aligned}$$

4. **LGS:** Die reellen Koeffizienten sollen so gewählt werden, daß die Operatoren \hat{C}_c^2 und \hat{C}_c^3 verschwinden. Daraus ergibt sich das folgende LGS:

$$\begin{aligned} \left(\omega^2 + r(1) \omega^4 + r(4) \right) &= 0 \\ \left(\omega^3 + r(1) \omega^6 + r(4) \right) &= 0 \end{aligned}$$

mit den Lösungen:

$$r(1) = -\frac{1}{\omega^2(1+\omega)} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1),$$

$$r(4) = -\frac{\omega^3}{1+\omega} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Die Normierung hat dann den Wert:

$$\mathcal{N} = 1 + r(1) + r(4) = -\frac{1 - \omega - \omega^3 + \omega^4}{\omega^2} = \sqrt{5}.$$

5. **Gemischtes Modul:** Wählt man nun in der Mischung der Pakete die Koeffizienten so, wie durch das LGS berechnet, erhält man die Dichtematrix:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\text{Modul}}(\mathbf{c}, k) &= \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{1}{25} \left(\mathcal{N} \hat{1} + \frac{\omega^2}{1+\omega+\omega^2} \hat{C}_{\mathbf{c}} + \frac{\omega^5}{1+\omega+\omega^2} \hat{C}_{\mathbf{c}}^4 \right) \\ &= \frac{1}{25} \left(\hat{1} + \underbrace{\frac{\omega}{\mathcal{N}(1+\omega+\omega^2)}}_{=\Xi} \left(\omega \hat{C}_{\mathbf{c}} + \omega^4 \hat{C}_{\mathbf{c}}^4 \right) \right) \end{aligned}$$

mit

$$\Xi = \frac{1}{2\sqrt{5}} (\sqrt{5}-1) < \frac{1}{2}.$$

Das so gemischte Modul entspricht dem oben gewünschten.

E Mischungen eines WERNER-Zustands mit Modulen

System: $N = 2$ Knoten mit $n = 3$ Niveaus

1. Korrelationstensor des Katzenzustands:

$$u_{\{c_1, c_2\}}(\hat{\rho}_{\text{Katze}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. **Modulauswahl:** Da alle Einträge im Korrelationstensor eins sind, benötigt man nur Module mit der Phase $\phi = 0$. Zu allen im Korrelationstensor auftretenden von null verschiedenen Elementen wird ein Modul benötigt:

$$\begin{aligned} &\hat{\rho}_{\text{Modul}}(\{1,2\}, 0), \quad \hat{\rho}_{\text{Modul}}(\{2,1\}, 0), \quad \hat{\rho}_{\text{Modul}}(\{3,3\}, 0), \quad \hat{\rho}_{\text{Modul}}(\{4,5\}, 0) \\ &\hat{\rho}_{\text{Modul}}(\{5,4\}, 0), \quad \hat{\rho}_{\text{Modul}}(\{6,6\}, 0), \quad \hat{\rho}_{\text{Modul}}(\{7,8\}, 0), \quad \hat{\rho}_{\text{Modul}}(\{8,7\}, 0) \end{aligned}$$

Alle Mischungskoeffizienten dieser Module sind eins.

3. Mischung aller Module:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\text{Misch}} &= \frac{1}{8}(\hat{\rho}_{\text{Modul}}(\{1,2\}, 0) + \hat{\rho}_{\text{Modul}}(\{2,1\}, 0) + \hat{\rho}_{\text{Modul}}(\{3,3\}, 0) + \hat{\rho}_{\text{Modul}}(\{4,5\}, 0) \\ &\quad + \hat{\rho}_{\text{Modul}}(\{5,4\}, 0) + \hat{\rho}_{\text{Modul}}(\{6,6\}, 0) + \hat{\rho}_{\text{Modul}}(\{7,8\}, 0) + \hat{\rho}_{\text{Modul}}(\{8,7\}, 0)) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5}{36} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} \\ 0 & \frac{7}{72} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{72} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{72} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{36} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{72} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{72} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{72} & 0 \\ \frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{36} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. **Vergleich mit WERNER-Zustand:** Aus dem Vergleich mit dem WERNER-Zustand erhält man:

$$\epsilon = \frac{1}{8} = \frac{1}{n^N - 1}$$

F Gedankenexperimente

F.1 EPR-Paradoxon

Hier soll die Rechnung zu den im Kapitel 2.2.1 vorgestellten EPR-Messungen kurz dargestellt werden (siehe dazu auch [15]). **System:** $N = 2, n = 2$

1. **Messoperator:** Die Messung der Polarisation am μ ten Teilchen kann mit Hilfe des Messoperators

$$\hat{A}(\mu) = \begin{pmatrix} \cos(\Theta(\mu)) & \sin(\Theta(\mu)) \\ \sin(\Theta(\mu)) & -\cos(\Theta(\mu)) \end{pmatrix}$$

durchgeführt werden. Dabei soll in der Messung das erste Teilchen nach links, das zweite nach rechts geflogen sein, außerdem soll der linke Polfilter auf $\Theta(1) = 0$ fest eingestellt sein und nur der rechte soll mit $\Theta(2) = \Theta$ verdreht werden (siehe Abbildung 2.1). Der Korrelationsmessoperator \hat{A} ist damit:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= A(\hat{1}) \otimes A(\hat{2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos(\Theta) & \sin(\Theta) \\ \sin(\Theta) & -\cos(\Theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\Theta) & \sin(\Theta) & 0 & 0 \\ \sin(\Theta) & -\cos(\Theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos(\Theta) & -\sin(\Theta) \\ 0 & 0 & -\sin(\Theta) & \cos(\Theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. **Zu messender Zustand:** Hier sollen verschiedene Zustände mittels des oben definierten Messoperators \hat{A} gemessen werden:

- a) Katzenzustand:

$$\hat{\rho}_{\text{Katze}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- b) WERNER-Zustand mit $\epsilon = \frac{1}{3}$:

$$\hat{\rho}_{\text{WERNER}} = \begin{pmatrix} \frac{1+\epsilon}{4} & 0 & 0 & \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \frac{1-\epsilon}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\epsilon}{4} & 0 \\ \frac{\epsilon}{2} & 0 & 0 & \frac{1+\epsilon}{4} \end{pmatrix}$$

- c) 6 Produktzustände in die der unter b) definierte WERNER-Zustand zerlegt werden kann:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{\rho}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \hat{\rho}_3 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, & \hat{\rho}_4 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \hat{\rho}_5 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & i & -i & 1 \\ -i & 1 & -1 & -i \\ i & -1 & 1 & i \\ 1 & i & -i & 1 \end{pmatrix}, & \hat{\rho}_6 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -i & i & 1 \\ i & 1 & -1 & i \\ -i & -1 & 1 & -i \\ 1 & -i & i & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

3. Korrelationsfunktion:

Die Korrelationsfunktion berechnet sich nach

$$f(\Theta) = \text{Spur}\{\hat{A} \hat{\rho}\}$$

- Korrelationsfunktion des Katzenzustands: $f(\Theta) = \cos(\Theta)$
(siehe Abbildung 2.1(b))
- Korrelationsfunktion des WERNER-Zustands $f(\Theta) = \epsilon \cos(\Theta)$
(siehe Abbildung 2.2)
- Korrelation jedes der sechs Zustände berechnen:

$$\begin{aligned}f_1(\Theta) &= \frac{1}{6} \cos(\Theta), & f_2(\Theta) &= \frac{1}{6} \cos(\Theta) \\ f_3(\Theta) &= f_4(\Theta) = f_5(\Theta) = f_6(\Theta) = 0\end{aligned}$$

Gesamte Korrelationsfunktion setzt sich zusammen als Summe der einzelnen:

$$f(\Theta) = \sum_{i=1}^6 f_i = \frac{1}{3} \cos \Theta$$

diese Funktion stimmt mit der aus Teil b) für $\epsilon = \frac{1}{3}$ überein.

Die Korrelationsfunktionen entsprechen den Erwartungen. Bei den gemischten Zuständen skaliert die Funktion $f(\Theta)$ mit ϵ , der Kontrast der Interferenz wird schwächer. Das Experiment macht keinen prinzipiellen Unterschied zwischen verschränkten und nichtverschränkten Zuständen, denn für $\epsilon > \frac{1}{3}$ ist der gemischte Zustand aus b) verschränkt.

F.2 „Blasse“ Teleportation

1. Quantenkanal:

$$\hat{\rho}_{\text{WERNER}} = \begin{pmatrix} \frac{1+\epsilon}{4} & 0 & 0 & \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \frac{1-\epsilon}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\epsilon}{4} & 0 \\ \frac{\epsilon}{2} & 0 & 0 & \frac{1+\epsilon}{4} \end{pmatrix}$$

2. Zu teleportierender Zustand:

$$\hat{\rho}_{\text{Alice}} = (a|0\rangle + b|1\rangle)(a^*\langle 0| + b^*\langle 1|) = \begin{pmatrix} aa^* & ab^* \\ ba^* & bb^* \end{pmatrix}$$

wobei gelten muß: $aa^* + bb^* = 1$

3. Zustand des ganzen Systems:

$$\hat{\rho}_{\text{ges}} = \hat{\rho}_{\text{Alice}} \otimes \hat{\rho}_{\text{WERNER}}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1+\epsilon}{4}aa^* & 0 & 0 & \frac{\epsilon}{2}aa^* & \frac{1+\epsilon}{4}ab^* & 0 & 0 & \frac{\epsilon}{2}ab^* \\ 0 & \frac{1-\epsilon}{4}aa^* & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\epsilon}{4}ab^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\epsilon}{4}aa^* & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\epsilon}{4}ab^* & 0 \\ \frac{\epsilon}{2}aa^* & 0 & 0 & \frac{1+\epsilon}{4}aa^* & \frac{\epsilon}{2}ab^* & 0 & 0 & \frac{1+\epsilon}{4}ab^* \\ \frac{1+\epsilon}{4}ba^* & 0 & 0 & \frac{\epsilon}{2}ba^* & \frac{1+\epsilon}{4}bb^* & 0 & 0 & \frac{\epsilon}{2}bb^* \\ 0 & \frac{1-\epsilon}{4}ba^* & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\epsilon}{4}bb^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\epsilon}{4}ba^* & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\epsilon}{4}bb^* & 0 \\ \frac{\epsilon}{2}ba^* & 0 & 0 & \frac{1+\epsilon}{4}ba^* & \frac{\epsilon}{2}bb^* & 0 & 0 & \frac{1+\epsilon}{4}bb^* \end{pmatrix}$$

4. EPR-Messung von Alice: Mit einer Wahrscheinlichkeit $p_3 = \frac{1}{4}$ mißt Alice den EPR-Zustand:

$$|\psi(1, 2)\rangle_3 \langle\psi(1, 2)|.$$

Angenommen dieser Fall ist eingetreten, dann wird der Gesamtzustand auf den Zustand

$$\hat{P}_3 = |\psi(1, 2)\rangle_3 \langle\psi(1, 2)| \otimes \hat{1}(3)$$

projiziert. Der Gesamtzustand geht dann über in den Zustand:

$$\hat{\rho}'_{\text{ges}} = \frac{1}{p_3} \hat{P}_3 \hat{\rho}_{\text{ges}} \hat{P}_3.$$

5. Zustand bei Bob: Durch Ausspuren erhält man den Zustand von Bob:

$$\hat{\rho}_{\text{Bob}} = \text{Spur}_{1,2}\{\hat{\rho}'_{\text{ges}}\} = \begin{pmatrix} \frac{1-\epsilon}{2} + \epsilon aa^* & \epsilon ab^* \\ \epsilon ba^* & \frac{1-\epsilon}{2} + \epsilon bb^* \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 - \epsilon)\hat{1} + \epsilon\hat{\rho}_{\text{Alice}},$$

damit ist man in diesem Fall schon fertig, Bob hat eine verbrauchte Version des ursprünglichen Zustands von Alice erhalten.

Literaturverzeichnis

- [1] C. H. Bennett, G. Brassard und C. Crépeau, Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895 (1993). [1](#), [10](#), [73](#)
- [2] S. Chiangga, P. Zarda, T. Jennewein und H. Weinfurter, Towards Practical Quantum Cryptography, *Appl. Phys. B* **67**, 749–752 (1998). [1](#), [73](#)
- [3] A. Müller, T. Herzog, W. Tittel, H. Zbindel und N. Gisin, Plug and play systems for quantum cryptography, *Appl. Phys. Lett.* **70**, 793–795 (1997). [1](#), [73](#)
- [4] M. Nielsen und I. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge, erste Auflage, 2000. [1](#), [73](#)
- [5] D. Deutsch und R. Jozsa, Rapid Solution of Problems by Quantum Computation, *Proc. R. Soc. London, Ser A* **439**, 553 (1992). [1](#), [73](#)
- [6] A. O. Pittenger und M. H. Rubin, Separability and Fourier representations of density matrices, *Phys. Rev. A* **62**, 032313 (2000). [1](#), [33](#), [34](#), [43](#), [86](#)
- [7] A. Otte, *Separabilität in Quantennetzwerken*, Dissertation, Universität Stuttgart, Stuttgart, Juli 2001. [1](#), [32](#), [34](#)
- [8] A. Peres, Separability Criterion for Density Matrices, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1413–1415 (1996). [1](#), [33](#)
- [9] P. Horodecki, M. Lewenstein, G. Vidal und I. Cirac, Operational criterion and constructive checks for the separability of low-rank density matrices, *Phys. Rev. A* **62**, 032310 (2000). [1](#)
- [10] S. Braunstein, C. Caves, R. Jozsa, S. Popescu und R. Schack, Separability of Very Noisy Mixed States and Implications for NMR Quantum Computing, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1054–1057 (1999). [1](#), [2](#)
- [11] M. Horodecki, P. Horodecki und R. Horodecki, Separability of n-particle mixed states: necessary and sufficient conditions in terms of linear maps, *Phys. Lett A* **283**, 1–7 (2001). [1](#)
- [12] A. Einstein, B. Podolsky und N. Rosen, Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?, *Phys. Rev.* **47**, 777–780 (1935). [1](#), [8](#), [10](#), [27](#)

- [13] R. Schack und C. Caves, Classical model for bulk-ensemble NMR quantum computation, *Phys. Rev. A* **60**, 4354–4362 (1999). 2
- [14] R. F. Werner, Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model, *Phys. Rev. A* **40**, 4277–4281 (1989). 2, 29
- [15] G. Mahler und V. Weberruß, *Quantum Networks*, Springer, Berlin, zweite Auflage, 1998. 3, 8, 10, 11, 13, 16, 28, 90
- [16] R. Schack und C. Caves, Explicit product ensembles for separable quantum states, quant-ph/9904109 (1999). 3
- [17] W. Nolting, *Quantenmechanik*, Teil 5 aus *Grundkurs Theoretische Physik*, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, dritte Auflage, 1997. 4, 11
- [18] A. Schrödinger, Die Gegenwärtige Situation der Quantenmechanik, *Naturwissenschaften* **23**, 807–812, 823–828, 844–849 (1935). 8, 10, 27
- [19] M. O. Scully und M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press, Cambridge, erste Auflage, 1997. 8
- [20] P. G. Kwiat, K. Mattle, H. Weinfurter und A. Zeilinger, New High-Intensity Source of Polarization-Entangled Photon Pairs, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4337–4340 (1995). 8
- [21] J. v. Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Teil 38 aus *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellung*, Springer, Berlin, erste Auflage, 1968, unveränderter Nachdruck der ersten Auflage von 1932. 11
- [22] A. Otte, Physik und Quanteninformation - Darstellung, Symmetrie und Dynamik, Diplomarbeit, Universität Stuttgart, Stuttgart, März 1998. 13, 24, 28, 67, 69, 79, 80
- [23] J. Schlienz, *Korrelation und Invarianten in Gekoppelten Quantennetzwerken: Beschreibung im $SU(n)$ -Formalismus*, Dissertation, Universität Stuttgart, Stuttgart, 1997. 13
- [24] T. Haury, Informationstransfer in Quantennetzwerken, Diplomarbeit, Universität Stuttgart, Stuttgart, Dezember 2001. 24
- [25] A. O. Pittenger und M. H. Rubin, Note on Separability of the Werner states in arbitrary dimensions, quant-ph/0001110 (2000). 34, 86
- [26] K. Meyberg und P. Vachenauer, *Höhere Mathematik*, Teil 1, Springer, Berlin, fünfte Auflage, 1999. 55

Index

- Aufwand, 69
 - Präparations-, 69
- Basis, 13, 19
 - hermitesch, 13
 - unitär, 13
- Basisoperatoren, 3, 13, 19
- bilokal, 24
- blasse Teleportation, 10, 92
- blasser Zustand, 30, 68, 71
 - Mischung, 64
 - PERES-Kriterium, 36f, 38
 - Produktoperatorentwicklung, 30, 64
- Cauchy-Schwarz-Ungl., 5, 34ff, 35–38
 - Dichteoperator, 6
 - Positivitätstest, 6
- Cluster, 20
- Clusteroperator, 20, 24
 - Definition, 20
- Dichtematrix, 4
- Dichteoperator, 4
 - Eigenschaften, 4
 - Hermitizität, 4
 - Normierung, 4
 - Positivität, 4
 - Quadrat, 7, 32
 - reduzierter, 7, 27, 32
- entanglement, 1
- EPR-Messung, 8, 10, 90, 92
- EPR-Paradoxon, 8, 90
- EPR-Zustand, 8, 10, 27
- Gedankenexperimente, 7
- Generatoren, 13
- Gruppe
 - hermitesch, 6, 13
- SU(n), 13
 - unitäre, 13
- Hilbertraum, 3, 5
- Katzenparadoxon, 27
- Katzenzustand, 8, 27, 82, 84, 91
 - verallgemeinert, 28
- klassisch, 1
- Knoten, 3
- Kohärenzvektor, 16, 24
- Korrelation, 19, 31, 73
- Korrelationsfunktion, 8, 91
- Korrelationsmatrix, 24
- Korrelationsmessung, 8
- Korrelationstensor, 12, 24, 33
 - element, 25
 - WERNER-Zustand, 29, 30, 45, 63
 - beliebiger Zustand, 25
 - blasser Zustand, 30, 64
 - Katzenzustand, 29
- Liouillerraum, 3, 19
- Matrizen
 - PAULI, 13
- Messtheorie, 10
- Messung
 - 2-Teilchen, 8, 10
 - EPR-, 8, 10
- Mischung, 39, 45, 53, 63
 - WERNER-Zustand, 45
 - mit Modulen, 89
 - optimal, 48, 50
 - Pakete, 45
- Mischungsaufwand, 69
- Mischungskoeffizienten, 65
- Mischungsverfahren
 - Grenzen, 51

- mit Modulen, 63
- mit Paketen, 45
- Module, 53, 89
 - Definition, 53
 - Eigenschaften, 54
 - Eigenwerte, 55
 - Eigenzustände, 55
 - Erzeugung, 57, 87
 - Hermitizität, 54
 - minimal Eigenschaft, 53
 - Mischungsverfahren, 63, 65, 89
 - Phase, 60
 - Positivität, 54
 - Separabilität, 55
 - Spur, 54
- Modulo-Funktion, 13
- multilokal, 24
- nichtlokal, 19
- Operator
 - PAULI, 10, 13, 53
 - hermitesch, 6, 13
 - partielltransponiert, 33
 - unitär, 13, 79, 80
- Operatorbasis, 13, 15, 19
 - Orthogonalität, 15, 21, 23
 - unitär, 13, 21, 23
 - Vollständigkeit, 15, 23
- Optimalität, 48, 50, 53, 68
- PAULI-Operatoren, 13
- PERES-Kriterium, 32, 34, 36, 38, 45, 50
- Pakete, 39, 82
 - Definition, 39
 - Eigenschaften, 41
 - Eigenwerte, 41
 - Eigenzustände, 41
 - Hermitizität, 41
 - Korrektur, 84
 - Korrelationstensor, 40
 - Mischung, 39, 45, 82
 - Positivität, 43
 - Produktoperatorenentwicklung, 40
 - Separabilität, 43
 - Spur, 41
- Partielltransponierte, 33
- Photonenpaar, 8
- Polarisationsverschränkung, 8
- positiv definit, 4
- Positivitätstest, 6
- PPT-Kriterium, 32, 34
- Primzahlen, 16
- Produktbasis, 7, 19, 25, 36
- Produktoperator, 19, 28, 39
 - Basis, 19
 - Definition, 19
 - Eigenschaften, 20
 - Eigenwerte, 22, 39
 - Eigenzustände, 22, 39
 - Entartungsgrad, 23
 - Kommutator, 22
 - Relationen, 22
 - Spur, 21
 - Unitarität, 21
- Produktoperatorenentwicklung, 23
- Produktraum, 3
- Produktzustand, 8, 20, 31, 64, 69
- Quantencomputer, 1
 - NMR-, 1
- Quanteninformationstheorie, 7
- Quantenkanal, 10, 92
- Quantenkryptographie, 1
- Quantennetzwerk, 3, 19
 - homogen, 3, 19
- Separabilität, 1, 31, 50, 73
 - WERNER-Zustand, 34, 35
 - Definition, 31
- Separabilitätsbedingung
 - WERNER-Zustand, 36
 - blasser Zustand, 38
- Separabilitätsgrenze, 48, 68
- Separabilitätskriterium, 32
 - PERES, 32, 33, 34, 45
 - hinreichend, 33, 45, 50, 68
 - Korrelationstensor, 33
 - notwendig, 33, 36, 38
 - PPT-, 32

- scharf, 33
- Simulation, 73
 - klassische, 69, 73
- Skalarproduktraum, 5
 - Linearität, 5
 - Skalarprodukt, 5
 - Vollständigkeit, 5
- Skalierung, 9, 12
- Subsysteme, 3, 19

- Teleportation, 1, 10, 92
 - blasse, 10

- unitäre Operatoren, 13, 79
 - Beispiele, 79
 - Definition, 13
 - Eigenschaften, 14
 - Eigenwerte, 16, 80
 - Eigenzustände, 16, 80
 - Kommutator, 15
 - Relationen, 14
 - Spur, 14
 - Unitarität, 14

- Verschränkung, 1, 31, 73
 - Definition, 31

- WERNER-Zustand, 39, 45, 63, 68, 70, 82, 84, 91, 92
 - Mischung
 - Module, 89
 - Pakete, 82
 - optimal, 48
 - Separabilität, 35

- Zustand, 4
 - WERNER, 2, 9, 11, 12, 29, 30, 34, 39, 45, 53, 63, 68, 70, 82, 84, 91, 92
 - beliebiger, 25
 - blaus, 11, 29, 30, 36, 53, 64, 68, 71
 - EPR-, 1, 8, 10, 27, 90
 - gebunden, 33
 - gemischt, 6, 27, 32
 - Katzen-, 8, 27, 82, 84, 91
 - PPT, 33
 - Produkt-, 8, 31
 - rein, 6, 27, 32
 - separabler, 1, 31
 - speziell, 27
 - verschränkt, 1, 31
- Zustandsklasse, 2
- Zustandsraum, 2, 34

Danksagung

Am Schluß dieser Arbeit möchte ich mich bei allen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, ganz herzlich bedanken; insbesondere danke ich:

Prof. Dr. G. Mahler für die interessante Aufgabenstellung, die hervorragende Betreuung, seine immerwährende Bereitschaft zur Diskussion und seine vielen Denkanstöße,

Prof. Dr. G. Wunner für die freundliche Aufnahme in das Institut für Theoretische Physik I,

Prof. Dr. S. Dietrich für die Übernahme des Mitberichts,

Dr. A. Otte für seine hervorragenden Mathematica-Funktionen sowie die Einführung in die Quanteninformationstheorie mittels seiner Diplom- und Doktorarbeit,

Dr. H. Michel für seine unermüdliche Korrektur meiner Schriften und die vielen Aufgaben, die er mit mir während des Studiums gerechnet hat,

J. Gemmer für viele philosophische sowie physikalische Diskussionen, seine Bereitschaft, mir immer zu helfen und sich mit meinen Problemen zu beschäftigen sowie für ein wirklich sehr schönes Jahr (wenn auch weitab des Gruppenzentrums),

H. Schmidt für seine unermüdliche Bereitschaft, mir bei allen physikalischen und computerbedingten Problemen, vor allem mit \LaTeX , zu helfen,

M. Stollsteimer für die Hilfe in allerlei \LaTeX - und Mathematica-Fragen,

allen anderen Mitgliedern der Arbeitsgruppe: P. Borowski, T. Haury, M. Hartmann und F. Tonner für die angenehme Arbeitsatmosphäre und die interessanten Gespräche,

der Kaffeerunde für viele seltsame Diskussionen (leider immer öfter ohne Nuss-ecken),

meiner Mutter und meinem Bruder für die vielfältige Unterstützung während meines Studiums

und ganz besonders meiner Freundin, die immer für mich da war, für ihre hervorragende Korrektur meiner Arbeit und ihr großes Verständnis, wenn ich mal wieder keine Zeit für sie hatte und vieles mehr.