



Dekohärenz und die Entstehung klassischer Eigenschaften aus der Quantenmechanik

G. Mahler

Spezialvorlesung SS 2006

- | | |
|-------------|---|
| 27. 4. 2006 | Einführung und Übersicht
Warum und in welchem Sinn ist Kohärenz »untypisch«? |
| 04. 5. 2006 | Zur Begründung der Thermostatistik aus der Quantenmechanik |
| 11. 5. 2006 | Dekohärenz: Dynamik offener Systeme |
| 18. 5. 2006 | Coarse graining und der Zeitpfeil |
| 1. 6. 2006 | Quantenthermodynamische Maschinen |
| 22. 6. 2006 | Nichtgleichgewicht: Zum Problem der Wärmeleitung |
| 29. 6. 2006 | Fluktuationstheoreme |
| 6. 7. 2006 | Messprozesse und stochastische Entfaltung |
| 13. 7. 2006 | Nanomechanik |
| 20. 7. 2006 | Physik und Information: Maxwells Dämon u. a. |
| 27. 7. 2006 | Quantencomputing versus klassische Rechner |

Literatur

- D. Giulini et. al.: Decoherence and the appearance of a classical world in quantum theory, Springer
J. Gemmer et. al.: Quantum Thermodynamics, Springer
H. P. Breuer et. al.: The theory of open quantum systems, Oxford

ZUR BEGRÜNDUNG der THERMODYNAMIK aus der QUANTENMECHANIK (M. Michel)

4.5. 2006

① HINTERGRUND:

a) Begründung der Thermodynamik aus der QT:

Problem: Irreversibilität aus reversiblen Bewegungsgleichungen der mikroskopischen Physik
↳ im Wesentlichen Herleitung / Begründung des 2. Hauptsatzes der Thermo dyn. ($dS > 0$)

Klassische Versuche:

- Stößzahlansatz, Rektangulars Chaos
 - Ergoden Hypothese
 - Quasiperioden Hypothesen
 - Mikroskopische Zellen im Phasenraum
 - Markov - Annahme
- Zusatzannahmen, die nur für die wenigsten Systeme gezeigt werden können

Quantummechanische Versuche:

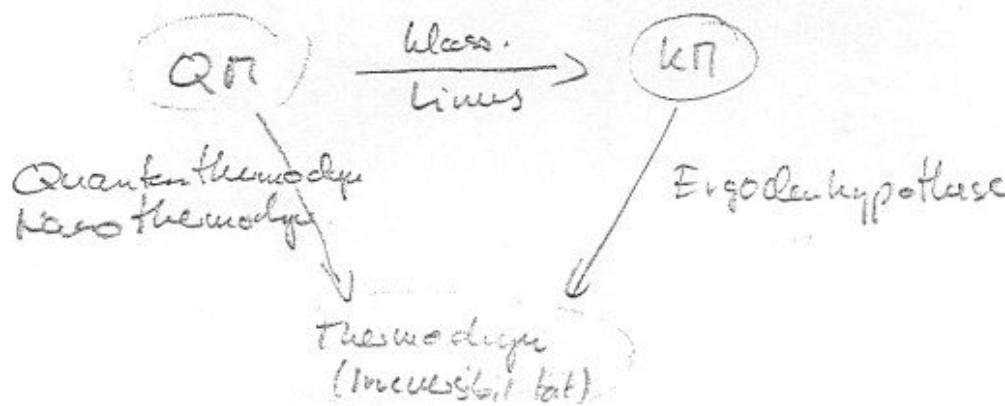
auch die QT ist eine reversible Theorie,
Schrödinger-Gleichung ist zeitumkehr invariant

→ Zusätzlich: Verzerrung (Hinweis: letzte Woche)

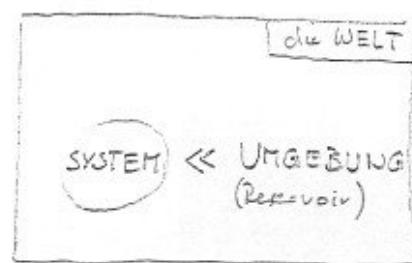
b) Nano-Thermodynamik:

Problem: Klassische Thermodynamik ist definiert in „Thermodynamischen Limes“ ($N \rightarrow \infty$)

In wieviel lassen sich thermodyn. Definitionen, Variable und Konzepte auf endliche insbesondere sehr kleine Systeme ausweiten?



② THERMODYN. SITUATION (System und Umgebung) L2



- die gesamte Welt sei in einem reinen Quantenzustand $|q\rangle$
- reine Dichtematrix der Welt
 $\hat{\rho} = |q\rangle\langle q|$
- die Zeitentwicklung sei geg. durch die Schrödinger-Gleichung
 $\frac{d}{dt}|q\rangle = -i\hat{H}|q\rangle \quad (t=1)$
- der Zustand des SYSTEMS ist gegeben durch die red. Dichtematrix
 $\hat{\rho}_s(t) = \text{Tr}_{\bar{R}} \{ |q(t)\rangle\langle q(t)| \}$

③ DARSTELLUNG:

Entwicklung von $|q\rangle$ nach beliebiger Basis $|j\rangle$:

$$|q\rangle = \sum_{j=1}^n (\underbrace{r_j + i\varphi_j}_{q_j \dots \text{komplexe Amplitude}}) |j\rangle = \sum_j q_j |j\rangle$$

Normierung: N.B. für 2n Parameter $\{r_j, \varphi_j\}$

$$\begin{aligned} \langle q|q\rangle &= \sum_{jk} (r_j - i\varphi_j)(r_k + i\varphi_k) \underbrace{\langle j|k \rangle}_{\delta_{jk}} \\ &= \left[\sum_j (r_j^2 + \varphi_j^2) \right] = 1 \end{aligned}$$

\Rightarrow Dynamik findet auf Hypersphäre mit Radius 1 im hochdim. Raum statt.

④ TYP der DYNAMIK:

$|q\rangle$ ist ein reell kompl. Vektor im Parameterraum $\{r_j, \varphi_j\}$
Hamiltonian \hat{H} ist eine $n \times n$ Matrix

$$H_{jk} = g_{jk} + i h_{jk}$$

\Rightarrow hermitesch: $h_{jj} = 0$, $h_{jk} = -h_{kj}$ und $g_{jk} = g_{kj}$

Schrödinger Gleichung: komponentenweise $\dot{\psi}_j = -i \sum_k H_{jk} \psi_k$

$$\dot{\psi}_j + i \dot{\xi}_j = -i \sum_k (\varrho_{jk} + i h_{jk})(\psi_k + i \xi_k)$$

$$= -i \varrho_{jk} \psi_k + \varrho_{jk} \xi_k + h_{jk} \psi_k + i h_{jk} \xi_k$$

\Rightarrow getrennte Betrachtung von real und imag Teil

$$\Rightarrow \dot{\psi}_j = h_{jk} \psi_k + \varrho_{jk} \xi_k$$

$$\dot{\xi}_j = -\varrho_{jk} \psi_k + h_{jk} \xi_k$$

$$\dot{q} = \underline{H} q := \underbrace{\underline{G}(q)}_{\text{Vektor}}$$

$$\text{div } \underline{G} = \frac{\partial G_i}{\partial q_i} = \frac{\partial G_i}{\partial u_i} + \frac{\partial G_i}{\partial \xi_i} \quad (\text{Einstein!})$$

$$= h_{jk} \underbrace{\frac{\partial \psi_k}{\partial \xi_j}}_{\delta_{kj}} + \varrho_{jk} \cancel{\frac{\partial \xi_k}{\partial \xi_j}}^0 - \varrho_{ik} \cancel{\frac{\partial \psi_k}{\partial \xi_i}}^0 + h_{jk} \underbrace{\frac{\partial \xi_k}{\partial \xi_i}}_{\delta_{ki}}$$

$$= 2 h_{jj} = 0 \quad (\text{wegen Hermitizität})$$

$\Rightarrow \boxed{\text{div } \underline{G} = 0}$ Dynamik ist Volumen erhalten!

analog zur klassischen Hamiltonschen Dynamik

\hookrightarrow "Strömung" einer inkompressiblen Flüssigkeit im
2n-dim. Parameterraum

\rightarrow analog zum Liouville'schen Satz in der
klassischen Mechanik

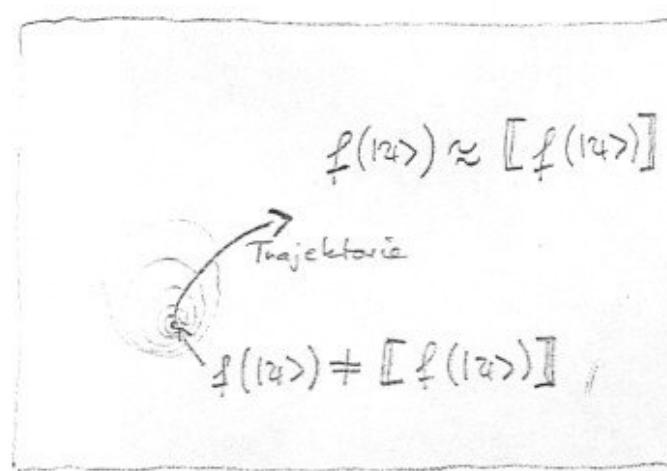
\rightarrow Zusammenhang $\text{div } \underline{G} = 0$ und Volumen erhalten,
siehe: - Arnold "Mathematical Methods of Statistical Mechanics"
Springer 1978

- Flügge "Statistische Thermodynamik"
Springer 1956

Warum ist Volumen erhalten wichtig?.. \rightarrow nächster Blatt

⑤ HILBERTRAUM - MITTEL METHODE:

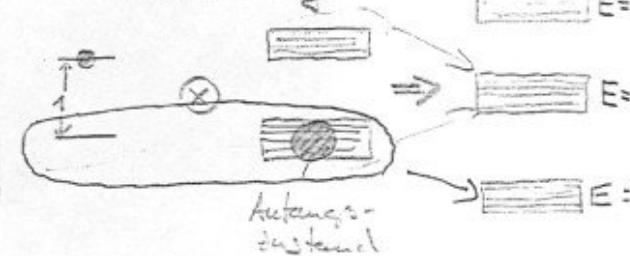
Gesuchtes Raten des Wertes einer Funktion f des quantenmechanischen Mikrozustands $|z\rangle$ (Wektor)



Zugängliches Gebiet im Hilbertraum

Einschränkung:

z.B. durch Gesamtenergielimitierung



$\|f\|$ Hilbertraum Mittel von f

wenn die Landschaft von f über dem Hilbertraum ausreichend flach ist können wir raten:

$$f(z) \approx \|f(z)\|$$

→ das ist nur sinnvoll für volumetrische Abbildungen
 • Dynamik muß der ursprünglich kleine Bereich verlassen
 • für volumetrische Abbildung ist das genau der Fall
 → Beispiel Stuttgart \leftrightarrow New York

→ Achtung: es gibt mit Sicherheit Hamiltonoperatoren die die unterschiedlichen Gebiete im Hilbertraum nicht loppen, dann ist das Ergebnis leider falsch

⑥ HILBERTRAUM - MITTEL für ERWARTUNGSWERTE HERMITESCHER OPERATOREN:

Parametrisierung des Zustands: $|z\rangle = \sum_j (n_j + i\xi_j) |j\rangle$
 → beliebige Basis $|j\rangle$

hermitescher Operator: \hat{A}

→ wähle als Basis die Eigenbasis von \hat{A} d.h.
 $\hat{A}|j\rangle = A_j |j\rangle \rightarrow \hat{A} = \sum_j A_j |j\rangle \langle j|$

$$\begin{aligned} \text{Hilbertraum-Mittel: } \|\langle z| \hat{A} |z\rangle\| &= \left\| \sum_{j,k} \langle j| (n_j + i\xi_j) A_k |k\rangle \delta_{jk} \right\| \\ &= \left\| \sum_k A_k (n_k^c + \xi_k^c) \right\| = \sum_k A_k (\|n_k^c\| + \|\xi_k^c\|) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle u | \hat{A} | u \rangle = \sum_k A_k (\langle \tau_k^2 \rangle + \langle \xi_k^2 \rangle)$$

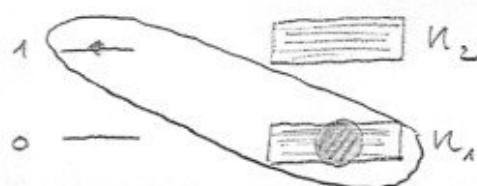
→ Integral von $f(x) = x^2$ über eine zu einem Hyperboloid \Rightarrow Siehe Gumm et al. Springer 2004

oder Symmetrie: $\langle \tau_k^2 \rangle = \langle \xi_k^2 \rangle = \frac{1}{2n}$

$$\Rightarrow \langle u | \hat{A} | u \rangle = \underbrace{\sum_k A_k}_{\text{Tr } \{\hat{A}\}} \cdot \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \right) = \frac{\text{Tr } \{\hat{A}\}}{n}$$

gesuchte Dimension
der zugängl. Basis

7 BEISPIEL: KANONISCHES GLEICHGEWICHT



$$\hat{H} = \begin{array}{|c|c|} \hline & \text{energi-} \\ & \text{aus-} \\ & \text{taus-} \\ & \text{ende} \\ & \text{Kopplung} \\ \hline & \vdots \\ \hline \end{array}$$

j (Index der n_2 Zust.)

k (Index der n_1 Zust.)

Projektionsoperatoren:

$$\hat{P}_0 = \sum_{j=1}^{n_2} |j\rangle \langle j| \quad \dots \rightarrow \quad \hat{P}_0 =$$

$$\hat{P}_1 = \sum_{k=1}^{n_1} |k\rangle \langle k|$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \circ \\ & \diagup \diagdown \\ \hline \circ & \circ \\ \hline \end{array}$$

Wahrscheinlichkeit des Systems in 0 oder 1 zu finden

$$\langle u | \hat{P}_0 | u \rangle \quad \text{oder} \quad \langle u | \hat{P}_1 | u \rangle$$

Hilberträummittel:

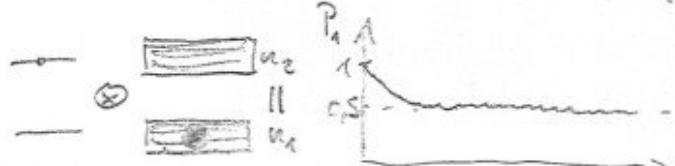
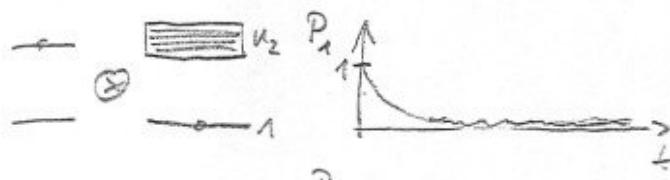
$$\langle \langle u | \hat{P}_0 | u \rangle \rangle = \frac{\text{Tr } \{\hat{P}_0\}}{n_1 + n_2} = \frac{n_2}{n_1 + n_2}$$

$$\langle \langle u | \hat{P}_1 | u \rangle \rangle = \frac{n_1}{n_1 + n_2}$$

→ Gleichgewichtswerte ...

Boltzmannverteilung
(kan. Verteilung)

$$\Rightarrow T = 0^\circ$$



$$\Rightarrow T = \infty^\circ$$

Allgemein

$\exists \propto \begin{array}{|c|c|} \hline & t \\ \hline \end{array}$ exponentiell
anzwachender
Faktor

$$\Rightarrow P_i \propto e^{-\frac{E_i}{kT}} \quad (\text{Boltzmann})$$

L6

⑧ HILBERT RAUM - FITTEL ENTROPIE bzv. PURITY:

$$f(\hat{u}) \rightarrow \underset{\text{(lokal)}}{\text{red. von Neumann Entropie: }} \hat{\beta}_s = \text{Tr}_{\hat{u}} \{ \hat{u} \times \hat{u} \}$$

$$S = - \text{Tr}_{\hat{s}} \{ \hat{\beta}_s \ln \hat{\beta}_s \} \quad (k_B = 1)$$

$$\rightarrow \underset{\text{(lokal)}}{\text{red. Purity (Reinheit)}}$$

$$P = \text{Tr}_{\hat{s}} \{ \hat{\beta}_s^2 \}$$

reiner Zustand: $P=1; S=0$

maximal gewischter Zustand: $S_{\max} = \ln n$ Dimension des Systems
 $P_{\min} = \frac{1}{n}$

$\llbracket S \rrbracket$ = sehr schwierig nichtlin. Fkt.

$\llbracket P \rrbracket$ = möglich aber lang \rightarrow deshalb nur Ergebnis

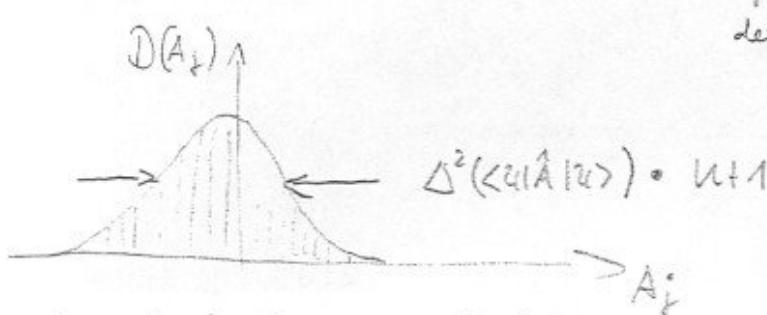
Ergebnis: die aller meisten Zustände im eingangs Hilbertraum eines zweiteiligen Systems haben die Eigenschaft für den kleineren Teil minimale purity bzw. maximale entropy zu haben. \rightarrow Thermodynamik
 siehe Gemmer et al. Springer 2004
 (kanonisches Gleichgewichts zustand)

⑨ HILBERT RAUM - VARIANZ: Fluktuationen

Wie flach ist der Hilbertraum für einen Erwartungswert eines hermitischen Operators

$$\Delta^2 (\langle \hat{u} | \hat{A} | u \rangle) := \llbracket \langle \hat{u} | \hat{A} | u \rangle^2 \rrbracket - \llbracket \langle \hat{u} | \hat{A} | u \rangle \rrbracket^2$$

$$\text{o.B.: } \left(\frac{1}{n+1} \right) \underbrace{\left(\frac{\text{Tr} \{ \hat{A}^2 \}}{n} - \left(\frac{\text{Tr} \{ \hat{A} \}}{n} \right)^2 \right)}_{\text{Spektrale Varianz der Operators } \hat{A}}$$

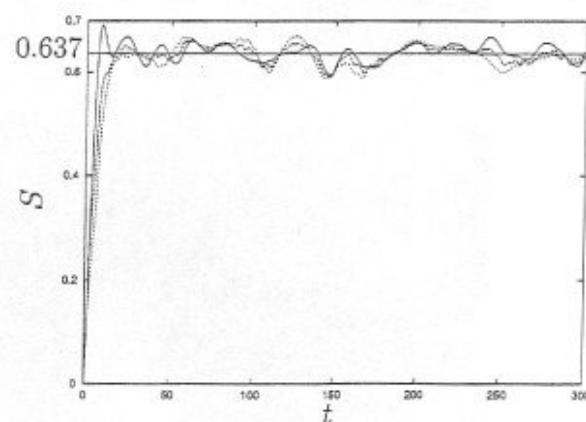
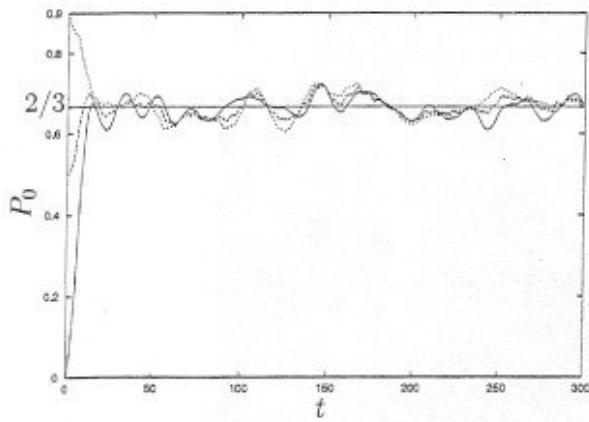
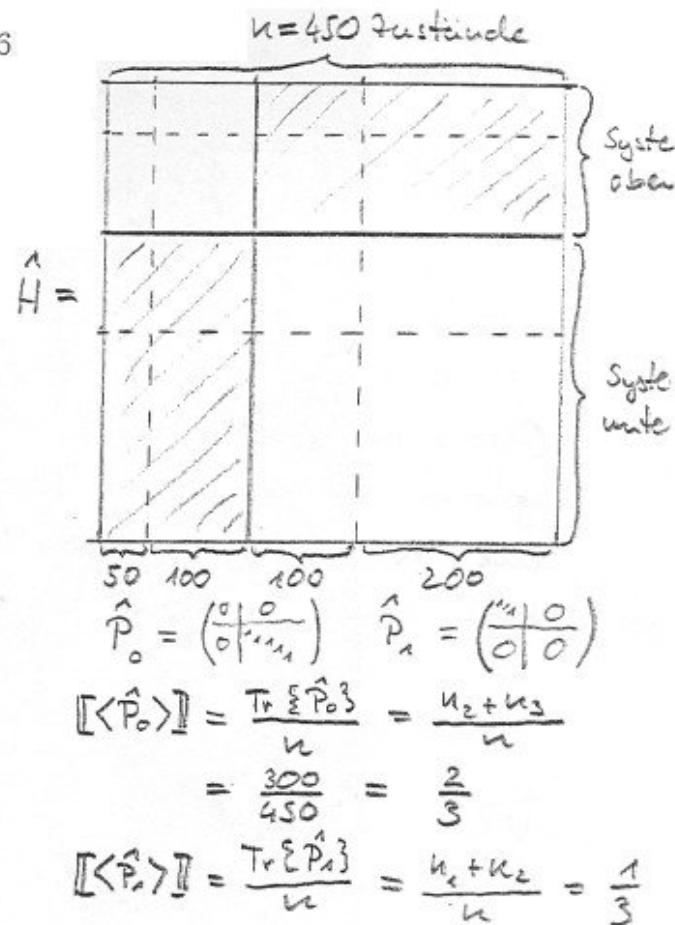
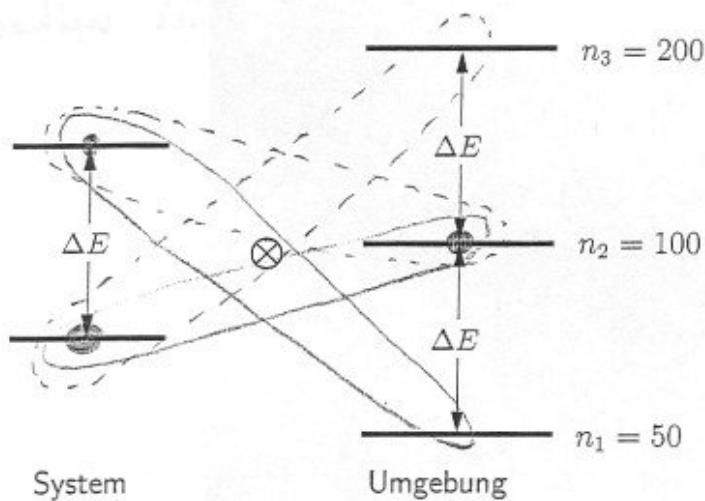


\rightarrow je mehr Zustände im Raum um so kleiner die Fluktuationen um den Gleichgewichtswert, Abfall $\sim \frac{1}{n}$

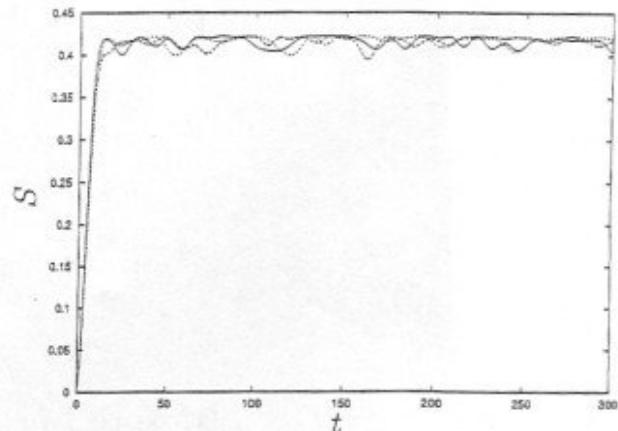
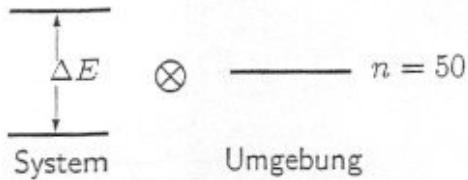
Zur Begründung der Thermostatistik aus der Quantenmechanik

4. Mai 2006

Kanonisches Gleichgewicht



Mikrokanonisches Gleichgewicht



Klassisch gibt es keine Umgebung für die mikrokanonische Situation.

Quantenmechanisch kann es jedoch eine Umgebung geben die zwar keine Energie mit dem System austauschen kann trotzdem aber Verschränkung mit dem System erzeugt, d.h. Nebendiagonalelemente löscht (kohärenzen zerstört).

⇒ Mikrokanonische Umgebung

Die Kopplung an eine solche Umgebung kann für eine maximale Entropie im System sorgen

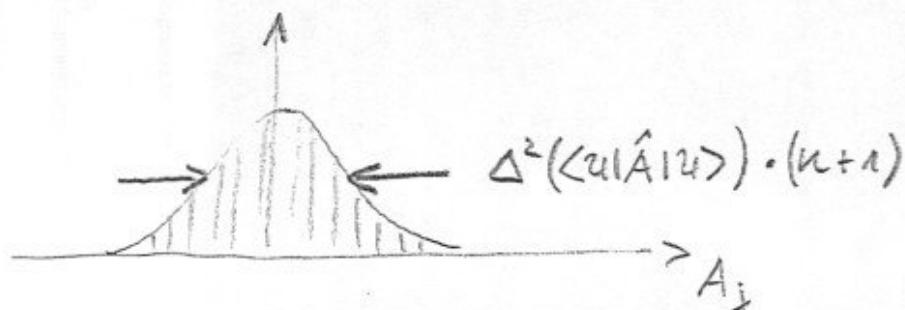
⑨ HILBERTRAUM - VARIANZ: Fluktuationen

Wie "flach" ist der Hilbertraum für den Erwartungswert eines hermitischen Operators?

$$\Delta^2(\langle u | \hat{A} | u \rangle) := [\langle u | \hat{A} | u \rangle^2] - [\langle u | \hat{A} | u \rangle]^2$$

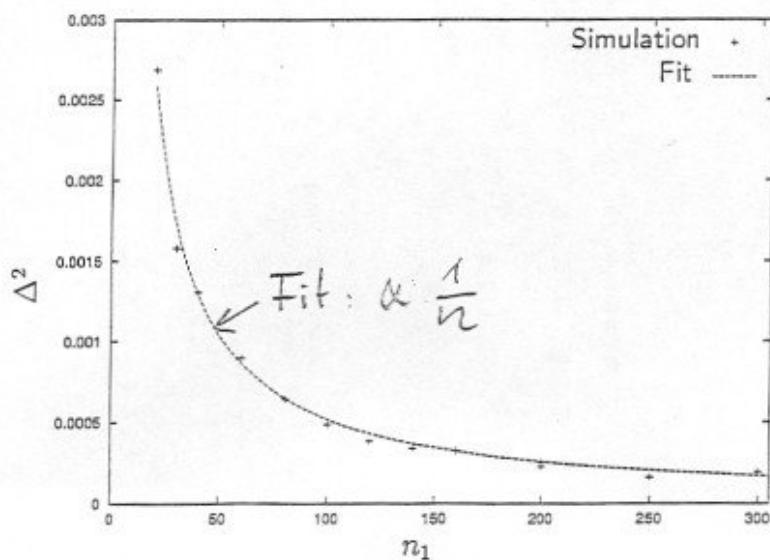
$$\text{ohne Rechnung} \quad \frac{1}{n+1} \left(\frac{\text{Spur}\{\hat{A}^2\}}{n} - \left(\frac{\text{Tr}\{\hat{A}\}}{n} \right)^2 \right)$$

Spektrale Varianz des Operators \hat{A}



- je mehr Zustände im Bad um so kleiner ist Δ^2 , d.h. um so flacher ist der Hilbertraum
- Fluktuationen um den Gleichgewichtswert fallen mit $1/n$ ab

Fluktuationen



16 Liouville's theorem

The phase flow of Hamilton's equations preserves phase volume. It follows, for example, that a hamiltonian system cannot be asymptotically stable.

For simplicity we look at the case in which the hamiltonian function does not depend explicitly on the time: $H = H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$.

A The phase flow

Definition. The $2n$ -dimensional space with coordinates $p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n$ is called *phase space*.

EXAMPLE. In the case $n = 1$ this is the phase plane of the system $\ddot{x} = -\partial U/\partial x$, which we considered in Section 4.

Just as in this simplest example, the right-hand sides of Hamilton's equations give a vector field: at each point (\mathbf{p}, \mathbf{q}) of phase space there is a $2n$ -dimensional vector $(-\partial H/\partial \mathbf{q}, \partial H/\partial \mathbf{p})$. We assume that every solution of Hamilton's equations can be extended to the whole time axis.³¹

Definition. The *phase flow* is the one-parameter group of transformations of phase space

$$g^t : (\mathbf{p}(0), \mathbf{q}(0)) \mapsto (\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t)),$$

where $\mathbf{p}(t)$ and $\mathbf{q}(t)$ are solutions of Hamilton's system of equations (Figure 47).

PROBLEM. Show that $\{g^t\}$ is a group.

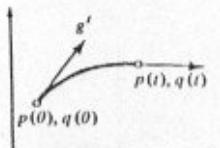


Figure 47 Phase flow

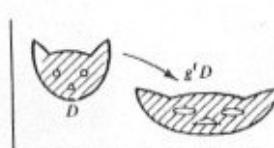


Figure 48 Conservation of volume

B Liouville's theorem

Theorem 1. The phase flow preserves volume: for any region D we have (Figure 48)

$$\text{volume of } g^t D = \text{volume of } D.$$

We will prove the following slightly more general proposition also due to Liouville.

Suppose we are given a system of ordinary differential equations $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, whose solution may be extended to the whole time axis. Let $\{g^t\}$ be the corresponding group of transformations:

$$(1) \quad g^t(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x})t + O(t^2), \quad (t \rightarrow 0).$$

Let $D(0)$ be a region in \mathbf{x} -space and $v(0)$ its volume;

$$v(t) = \text{volume of } D(t) \quad D(t) = g^t D(0).$$

Theorem 2. If $\text{div } \mathbf{f} \equiv 0$, then g^t preserves volume: $v(t) = v(0)$.

C Proof

Lemma 1. $(dv/dt)|_{t=0} = \int_{D(0)} \text{div } \mathbf{f} \, dx \quad (dx = dx_1 \cdots dx_n)$.

PROOF. For any t , the formula for changing variables in a multiple integral gives

$$v(t) = \int_{D(0)} \det \frac{\partial g^t \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} \, dx.$$

Calculating $\partial g^t \mathbf{x} / \partial \mathbf{x}$ by formula (1), we find

$$\frac{\partial g^t \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = E + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} t + O(t^2) \quad \text{as } t \rightarrow 0. \quad \square$$

We will now use a well-known algebraic fact:

Lemma 2. For any matrix $A = [a_{ij}]$,

$$\det[E + At] = 1 + t \text{tr } A + O(t^2), \quad t \rightarrow 0,$$

where $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ is the trace of A (the sum of the diagonal elements).

(The proof of Lemma 2 is obtained by a direct expansion of the determinant: we get 1 and n terms in t ; the remaining terms involve t^2, t^3 , etc.)

Using this, we have

$$\det \frac{\partial g^t \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = 1 + t \text{tr } \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} + O(t^2).$$

But $\text{tr } \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \text{div } \mathbf{f}$. Therefore,

$$v(t) = \int_{D(0)} [1 + t \text{div } \mathbf{f} + O(t^2)] \, dx,$$

which proves Lemma 1. \square

PROOF OF THEOREM 2. Since $t = t_0$ is no worse than $t = 0$, Lemma 1 can be written in the form

$$\left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = \int_{D(t_0)} \text{div } \mathbf{f} \, dx,$$

and if $\text{div } \mathbf{f} \equiv 0$, $dv/dt \equiv 0$. \square

In particular, for Hamilton's equations we have

$$\text{div } \mathbf{f} = \frac{\partial}{\partial p} \left(-\frac{\partial H}{\partial q} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) \equiv 0.$$

This proves Liouville's theorem (Theorem 1). \square

³¹ For this it is sufficient, for example, that the level sets of H be compact.

J. Gemmer, M. Michel, G. Mahler

Quantum Thermodynamics

A.2 Integration of a Function on a Hypersphere

To integrate a polynomial function over the hypersphere surface one can use the same approach as in the last Section. Consider the function

$$f(x_i, x_j) = (x_i)^l (x_j)^k \quad \text{with } l, k \geq 0 , \quad (\text{A.11})$$

and the integration

$$\begin{aligned} I(d) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x_i, x_j) \exp\left(-\frac{1}{R^2} \sum_{i'=1}^d x_{i'}^2\right) \prod_{j'} dx_{j'} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (x_i)^l (x_j)^k \exp\left(-\frac{1}{R^2} \sum_{i'=1}^d x_{i'}^2\right) \prod_{j'} dx_{j'} \\ &= \pi^{\frac{d-2}{2}} R^{d-2} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i)^l \exp\left(-\frac{x_i^2}{R^2}\right) dx_i \int_{-\infty}^{\infty} (x_j)^k \exp\left(-\frac{x_j^2}{R^2}\right) dx_j \\ &= \pi^{\frac{d-2}{2}} \frac{1}{4} (1 + (-1)^l) \Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right) (1 + (-1)^k) \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) R^{d+l+k} . \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

We switch to generalized spherical coordinates, as in the previous section, which transforms the function (A.11) into

$$\begin{aligned} f(x_i, x_j) &\mapsto f\left(\left\{\frac{r}{R}, \phi_1, \dots, \phi_{d-1}\right\}\right) \\ &= \left(\frac{r}{R} \prod_{i'=1}^{i-1} \sin \phi_{i'} \cos \phi_i\right)^l \left(\frac{r}{R} \prod_{i'=1}^{j-1} \sin \phi_{i'} \cos \phi_j\right)^k \\ &= \left(\frac{r}{R}\right)^l \left(\frac{r}{R}\right)^k (z_i(\{\phi_{i'}\}))^l (z_j(\{\phi_{i'}\}))^k , \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

and the integral into

$$I(d) = \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{R^2}} \left(\frac{r}{R}\right)^{d+l+k-1} dr \int (z_i(\{\phi_{i'}\}))^l (z_j(\{\phi_{i'}\}))^k d\Omega . \quad (\text{A.14})$$

Here we are interested in the last integral, $Z(R, d, l, k)$. From

$$I(d) = \frac{R\Gamma(\frac{d+l+k}{2})}{2} Z(1, d, l, k) \quad (\text{A.15})$$

we find

$$\begin{aligned} Z(R, d, l, k) &= \frac{2I(d)}{R\Gamma(\frac{d+l+k}{2})} \\ &= \frac{\pi^{\frac{d-2}{2}}}{2} (1 + (-1)^l) (1 + (-1)^k) \frac{\Gamma(\frac{l+1}{2}) \Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{d+l+k}{2})} R^{d+l+k-1} . \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Note that $Z(R, d, 0, 0) = \mathcal{O}(R, d)$ and that all integrals are zero, if either l or k is odd. Here we need some special and normalized integrals only

$$\mathcal{O}(R, d, l, k) := \frac{Z(R, d, l, k)}{Z(R, d, 0, 0)}, \quad (\text{A.17})$$

$$\mathcal{O}(R, d, 0, 1) = \mathcal{O}(R, d, 1, 1) = 0, \quad (\text{A.18})$$

$$\mathcal{O}(R, d, 0, 2) = \frac{R^2}{d}, \quad (\text{A.19})$$

$$\mathcal{O}(R, d, 2, 2) = \frac{R^4}{d^2 + 2d}, \quad (\text{A.20})$$

$$\mathcal{O}(R, d, 0, 4) = \frac{3R^4}{d^2 + 2d}. \quad (\text{A.21})$$

Merksätze

1. Die klassische Thermodynamik kann vollständig aus der Quantentheorie aufgebaut werden, d. h. irreversibles Verhalten (2. Hauptsatz der Thermodynamik) bestimmter Systeme (thermodynamische Systeme) folgt bereits aus der Schrödinger-Gleichung *ohne* zusätzliche Annahmen.
2. Zentrale zusätzliche Eigenschaft in der Quantenmechanik ist der Aufbau von Verschränkung zwischen System und Umgebung, die es klassisch nicht gibt.
3. Thermodynamisches Verhalten ist schon in erstaunlich kleinen Systemen zu finden.